

ELMÉLETI KIEGÉSZÍTÉS A 8. FEJEZETHEZ

1. A $\hat{\beta}$ paramétervektor becslése a KLN módszerével

$y = X\hat{\beta} + e$ és keressük az a $\hat{\beta}$ -t, amelyik mellett $e^T e \rightarrow \min$. Mivel $e = y - X\hat{\beta}$ és így $e^T e = (y - X\hat{\beta})^T (y - X\hat{\beta}) = y^T y - \hat{\beta}^T X^T y - y^T X^T \hat{\beta} + \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta}$, az első derivált gyöke, az

$$\frac{\partial e^T e}{\partial \hat{\beta}} = -2X^T y + (X^T X)\hat{\beta} = 0$$

egyenletrendszer megoldása adja a szélsőérték helyét. Átrendezés után ebből

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

kapható. Mivel a második deriváltakat tartalmazó Hesse-mátrix $H = (X^T X)$ konstrukciójánál fogva pozitív definit, ezért a szélsőérték-hely minimum, azaz eleget tesz a legkisebb négyzetek követelményének.

2. A $\hat{\beta}$ paramétervektor torzítatlansága

$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon) = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$, majd ennek várható értékét véve:

$E(\hat{\beta}) = \beta + E((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon)$. Mivel a feltételezések szerint X nem tartalmaz valószínűségi változókat (konstans), ezért a várható érték elé kiemelhető, akkor pedig az ε -ra tett feltételezések miatt a második tag várható értéke 0:

$$E(\hat{\beta}) = \beta + E((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon) = \beta + (X^T X)^{-1} X^T E(\varepsilon) = \beta.$$

A konzisztencia bizonyításához olyan eszközökre lenne szükségünk, amelyeket e tárgy hallgatói nem ismernek, ezért akik ezt az eredményt is részleteiben meg akarják ismerni, azoknak ajánljuk a vonatkozó szakirodalom (pl. Hunyadi [2001]) tanulmányozását.

3. A $\hat{\beta}$ becslőfüggvény kovariancia mátrixának származtatása

Mivel a $\hat{\beta}$ becslőfüggvény torzítatlan, $Cov(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T$, és felhasználva a 2. pont részeredményét, miszerint $\hat{\beta} - \beta = (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$, a keresett kovariancia:

$$Cov(\hat{\beta}) = E\left[(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon \varepsilon^T X (X^T X)^{-1}\right].$$

Most ismét felhasználva, hogy X nem változó, valamint azt a feltételezést, hogy ε 0 várható értékű és korrelálatlan változókból áll, ami $Cov(\varepsilon) = E(\varepsilon \varepsilon^T) = \sigma^2 I$, a keresett kovariancia:

$$Cov(\hat{\beta}) = \left[(X^T X)^{-1} X^T E(\varepsilon \varepsilon^T) X (X^T X)^{-1}\right] = \sigma^2 (X^T X)^{-1} (X^T X) (X^T X)^{-1} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}.$$