

D1: Kombinatorika. (Binomiális együtthatók.)

1. Egy pszichológus azt kapta feladatul, hogy öt kísérleti személyt állítson sorba aszerint, hogy mennyire tartja őket barátságosnak. Hányféle sorba rendezés lehetséges?
2. Tíz kísérleti személyből hármat kell kiválasztani egy további kísérlethez. Hány kiválasztás lehetséges?
Egyszerűsítsük a következőket!

3. $\frac{(n-1)!}{n-1}$ 4. $\frac{n!}{(n-1)!}$ 5. $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$

6. Számítsuk ki a következő összeget: $\frac{(k+1)!}{k!} + \frac{k!}{(k-1)!} + \frac{(k-1)!}{(k-2)!}$

7. Számítsuk ki a következő két tört, $\frac{(n+1)!}{n!}$ és $\frac{n!}{(n-1)!}$
- a) különbségét
 - b) szorzatát
 - c) hányadosát!

8. Alakítsuk át az $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$ kifejezést.

9. Egy szabályos dobókockát hatszor egymás után feldobunk. A kapott eredményeket egymás mellé írjuk. Hány kimenetele lehet a kísérletnek?

10. A következő számsorozat a Pascal háromszög egy befejezetlen sora:

1 10 45 120 210 252

- a) A Pascal háromszög hányadik sora ez?
- b) Írják fel a sor ötödik elemét, 210-et binomiális együttható formájában!
- c) Folytassák a sort!
- d) Írják fel a következő sort!

A Pascal-háromszög egy csonka sora áll itt:

126 126 84 36 9 1

- a) Egészítsék ki a sort!
- b) Írják föl a Pascal-háromszög *következő* sorát!
- c) Az új sor hányadik sora a háromszögnek?
- d) Hogyan nevezik a Pascal-háromszögben található számokat?

11. Bizonyítsák be a binomiális együtthatók képletének segítségével a Pascal-háromszög néhány alapvető tulajdonságát:

- a) minden sor első eleme 1;
- b) minden sor második eleme egyenlő a sor sorszámaival (az n -edik sor második eleme tehát n);
- c) a háromszög szimmetrikus a csúcsból bocsátott „tengelyre” – a háromszög „magasságvonalára” – vonatkozóan.

12. A Pascal-háromszög konstrukciója a következő egyenlőségre épül:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(Ennek segítségével tudjuk bármelyik sorból a *rákövetkezőt* előállítani.)

Először igazoljuk ezt az összefüggést két konkrét esetben:

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}, \text{ illetve } \binom{9}{6} + \binom{9}{7} = \binom{10}{7}.$$

(Ha másképp nem megy, azt mutassuk meg, hogy a baloldalt álló két egész szám összege éppen egyenlő a jobb oldali egész számmal.)

Ha sikerül ezt a kettőt igazolnunk, próbálkozzunk meg a fenti, általános összefüggés igazolásával is!