Magyar Tudomány 182(2021)8, 1108–1123
DOI: 10.1556/2065.182.2021.8.10

Interjú

BOLYONGÁS A MATEMATIKÁBAN ÉS HATÁRÁN
LACZKOVICH MIKLÓS INTERJÚJA LOVÁSZ LÁSZLÓVAL[1]

A RANDOM WALK IN AND AROUND MATHEMATICS
MIKLÓS LACZKOVICH'S INTERVIEW WITH LÁSZLÓ LOVÁSZ

ÖSSZEFOGLALÁS

Lovász László, matematikus, egyetemi tanár és az MTA korábbi elnöke nyerte el a 2021-es Abel-díjat, számos korábbi díj és elismerés betetőzéseként. Az interjúban matematikusi és kutatói pályájába enged bepillantást

ABSTRACT

László Lovász, mathematician, university professor, and former President of the Hungarian Academy of Sciences, recipient of many mathematical medals, awards and prizes, received the 2021 Abel Prize. The interview gives some insight into his career in mathematics and science.

Kulcsszavak: Lovász László matematikai munkássága, Abel-díj, matematikai sejtések és problémák

Keywords: the mathematical work of László Lovász, Abel Prize, conjectures and problems

A közelmúltban Lovász Lászlónak, az MTA korábbi elnökének ítélték oda a matematikusok legjelentősebb szakmai elismerésének számító Abel-díjat. Ebből az alkalomból lapunk interjút kért tőle, amelyben tudományos munkásságát próbáljuk meg áttekinteni. A matematika elvont világát kiváltképpen nehéz közérthetően bemutatni, ezért olyan szakembert kértünk fel beszélgetőtársnak, aki matematikusként tisztában van ezzel, szakmai szempontból méltó partnere, ráadásul igen jól ismeri interjúalanyát, hiszen középiskolásként osztálytársak voltak a Fazekas Mihály Gimnázium legendás matematikai tagozatán. Lovász Lászlót Laczkovich Miklós akadémikus, az MTA Matematikai Tudományok Osztályának elnöke faggatta.

[1] Az interjú 2021. április 7-én készült Budapesten.

Laczkovich Miklós: Nem tudok olyan matematikusról, akit ennyi díjjal jutalmaztak tudományos eredményeiért. Számos korábbi elismerés után idén megkaptad a matematika tudományában legmagasabb kitüntetésnek számító Abel-díjat. Eddigi munkásságodat próbáljuk meg talán a díjak tükrében áttekinteni, időrendi sorrendben, felidézve, hogy melyik díjjal milyen eredményt ismertek el. A legelső a Grünwald Géza-emlékérem volt 1969-ben, ezt még egyetemistaként kaptad.

Lovász László: Ehhez tudni kell, hogy T. Sós Vera rábeszélésére akkor már benyújtottam a kandidátusi értekezésemet, és a kandidátusi fokozat birtokában már nem kaphattam volna meg ezt, a fiatalok számára adományozható elismerést. Hogy miért kaptam? Talán Alfred Tarski véges struktúrák rövidítési szabályára vonatkozó problémájának megoldásáért. Szegény Tarski, a mi osztályunkkal nem járt jól, vagy talán nagyon is jól járt, hiszen egy másik, sokkal híresebb sejtését éppen neked sikerült megoldanod. De akkorra már voltak más eredményeim is, például a párosításokkal vagy gráfok utakra bontásával kapcsolatban. A rövidítési szabály számok körében azt az egyszerű tényt jelenti, hogy ha $a \cdot c = b \cdot c$, és c nem 0, akkor $a = b$. Nemcsak számokat, hanem struktúrákat is össze lehet szorozni, és a Tarski-problémával kapcsolatban azt bizonyítottam be, hogy ha A × C izomorf B × C-vel, és C-re érvényes egy nem-nullasági feltétel (konkrétan, hogy van 1 elemű részstruktúrája), akkor A izomorf B-vel. Később kiderült, hogy Tarski már egy évtizede felvetette ezt a sejtést, de bizonyítani nem tudta.

L. M.: Ez hogyan derült ki?

L. L.: Úgy, hogy az ezt a cikkemet angolra fordító és lektoráló Makkai Mihály a Stanford Egyetemen találkozott Tarskival, és megemlítette neki az eredményt. Tarski elmondta a probléma történetét Makkainak, aki ezt megírta Gallai Tibornak, Gallai Tibor pedig elújságolta nekem. Ezt az eredményt azért érdemes megemlíteni, mert ennek az alapgondolatából nőtt ki valahogyan a gráflimesz elmélet is. Maga az alapgondolat az, hogy egy véges A struktúrát el lehet kódolni úgy, hogy minden másik véges D struktúrára megmondom, hogy hány homomorfizmusa van A-ban, vagyis hányféleképpen lehet D elemeit úgy beleképezni A-ba, hogy az elemek közötti relációk és műveletek érvényben maradjanak. Ez a számsorozat egyértelműen elkódolja az adott véges struktúrát. Mivel két struktúra szorzásakor a hozzájuk rendelt számsorozatok elemenként összeszorzódnak, ezzel visszavezettük a kérdést a számok körében érvényes egyszerűsítési szabályra. Sokkal később ezt a számsorozatot használva jutottunk el a gráfsorozat konvergenciájának definíciójához.

L. M.: Tehát egy ilyen jellegű gondolat már abban a cikkben is megjelent. Ez nagyon érdekes. Aztán 1979-ben az MTA-tól Matematikai Díjat (a későbbi Erdős Pál-díj) kaptál. Azzal már sokféle eredményedet ismerhették el.

L. L.: Az valószínűleg az addig elért eredményeim általános elismerése volt.

L. M.: És a Pólya-díj, ugyancsak 1979-ben?

L. L.: Annak indoklásában a perfektgráf sejtés szerepelt, és talán a Kneser-sejtés is.

L. M.: A perfektgráf sejtés 1972-es megoldásának szerepeltetése nyilvánvaló, hiszen annak az eredménynek akkoriban nagy visszhangja volt szakmai körökben.

L. L.: A perfektgráf sejtést kicsit hosszadalmas volna megfogalmazni, de a Kneser-sejtés egy nagyon egyszerűen megfogalmazható állítás: ha $2n + k$ elemű halmaz n elemű részhalmazait $k + 1$ színnel kiszínezzük, akkor van két diszjunkt, azonos színű halmaz. Ez volt a sejtés, amelyet érdekes módon a topológiai Borsuk-tételre visszavezetve sikerült igazolni. Ezt követően a topológiai módszer első alkalmazásaként hivatkoztak erre a bizonyításra az összefoglaló cikkekben.

L. M.: Ez is egy vezérfonal: kombinatorikai problémák megoldása geometriai vagy topologikus megközelítéssel.

L. L.: Igen, a matematika más területeiről kölcsönzött módszerek alkalmazása azóta is izgalmas téma számomra.

L. M.: Viszont az 1980-as Information Theory Society Paper Awardot már a Shannon-kapacitásról szóló munkádért kaptad.

L. L.: Igen. Azzal az évenként kiadott díjjal mindig egy, az előző évben publikált eredményt ismernek el.

L. M.: Pontosítsd, kérlek, ez a Shannonnal kapcsolatos eredmény ugyanaz, mint az a gráfelméleti konstans, amelyik a klikkszám és színezésszám közé esik?

L. L.: Igen, a Shannon-probléma megoldásán kívül ez a konstans sokfelé alkalmazható. Mai nyelven ezt úgy mondanánk, hogy egy gráfban a független ponthalmaz maximális méretének van egy szemidefinit relaxációja, felső korlátja. Másként megfogalmazva, itt jöttek elő az ortogonális reprezentációk. Tehát ha van egy gráfod, akkor megpróbálsz vektorokat rendelni a csúcsokhoz, hogy a nem összekötött pontok ortogonális vektorokkal legyenek reprezentálva, és ezeket próbálod minél kisebb kúpon belül elhelyezni. És a legkisebb nyílásszögű kúp, amelyikben ez megoldható, adja ezt a számot.

L. M.: Ami polinomiálisan számítható, míg a kromatikus szám és a klikk nem.

L. L.: Igen. Régi kérdés, hogy hány szín kell ahhoz, hogy egy gráf csúcsait úgy tudjuk kiszínezni, hogy szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak. Ezt hívjuk kromatikus számnak. Erre alsó korlátot ad a gráf pontjai között a páronként összekötöttek maximális száma. Ezt hívják klikkszámnak. Mindkét mennyiség NP-nehéz, vagyis nem számítható ki hatékonyan. A fent említett konstans azonban igen, és elválasztja a klikket és a kromatikus számot.

L. M.: A következő a Mathematical Programming Society és az American Mathematical Society Fulkerson-díja volt, 1982-ben.

L. L.: Azt a háromévente odaítélt díjat többen kaptuk, köztük én, a lineáris programozásban elért eredményeimért.

L. M.: Tehát már akkor foglalkoztattak az algoritmikus dolgok.

L. L.: Igen, már egy ideje foglalkoztattak. A perfektgráf tétel is lényegében egy egészértékű programozási eredmény. Az az egyik fő lépése, hogy bizonyos típusú lineáris programról meg lehet mutatni, hogy ha létezik racionális megoldása, akkor van egész megoldása is. Érdekelni kezdett, hogy ez az összefüggés meddig vihető tovább. Az 1978-ban készített akadémiai doktori értekezésemnek ez volt a témája.

L. M.: Ami nyilvánvalóan indokolja a Fulkerson-díjat. Időrendben a következő az 1991-es Szele Tibor-emlékérem. Ez a Bolyai János Matematikai Társulat általános díja, amelyet általában idős matematikusok kapnak. Te viszont 43 évesen részesültél ebben az elismerésben.

L. L.: Akkor úgy gondoltam, hogy már nem vagyok annyira fiatal.

L. M.: 1998-ban pedig Bolzano-érmet kaptál, a Cseh Matematikai Társaság díját. Akkor már szakmai kapcsolatban voltál cseh matematikusokkal?

L. L.: Igen, már az 1970-es évektől. A cseh matematikusok a 70-es évek végétől minden évben szerveztek egy téli iskolát, azokon én is mindig részt vettem. Ezek témája az elég széles értelemben vett topológia volt, belefért a mértékelmélet és a gráfelmélet is.

L. M.: Néhányszor én is részt vettem ezeken az iskolákon. Volt szó azokon analízisről, kombinatorikáról, Banach-terekről is.

L. L.: Abban az időben már volt közös munkám cseh matematikusokkal, az ezekből készített algebrai gráfelméleti témájú cikkekben Jaroslav Nešetřil és Aleš Pultr voltak a szerzőtársaim.

L. M.: Nešetřil köre is megjelent ott?

L. L.: Igen, Jarikon kívül mindig ott volt Vojtech Rödl is, meg a fiatalok, akik ma már nem annyira fiatalok. Szoros kapcsolatom volt az algebrai gráfelméletet művelő cseh kollégákkal, mert ez a téma nagyon érdekelt.

L. M.: És ez az irány már a Shannon-kapacitásos munkádban is megjelent.

L. L.: Igen, azt, hogy a Shannon-témánál felvetődött az algebrai irány, az is motiválta, hogy volt egy közös cikkünk Jarikkal és Aleš-sel, amelyben először érveltünk gráfelméletben tenzorhatványokkal, és egy gráf dimenzióját is definiáltuk. Először ezt a definíciót próbáltam alkalmazni a Shannon-problémára is, ott végül is másképpen kellett eljárni, de a motivációban fellelhető a cseh munkakapcsolat.

L. M.: Az 1999-es Wolf-díj indoklásában mi szerepelt?

L. L.: Azzal az addigi munkáimat ismerték el, nem egy konkrét eredményt.

L. M.: A Wolf-díjat a Hebrew University ajánlása nyomán ítélik oda?

L. L.: Izraelban van egy Wolf Alapítvány, az adja a díjat, de Izrael Állam is közreműködik az eljárásban. A díjátadó ceremóniát az ottani Parlamentben tartják.

L. M.: 2001-ben pedig Gödel-díjat kaptál a European Association for Theoretical Computer Science-től.

L. L.: Ezt azért az eredményért kaptam, hogy egy gráf klikkszáma nem számítható ki polinomiális időben, még közelítőleg, konstans szorzó hibát megengedve sem. Ez volt az első általános negatív (vagyis lehetetlenséget bizonyító) eredmény a közelítő algoritmusokról. A díjat számos kollégámmal megosztva kaptam, társszerzőimmel és azokkal, akik az eredeti eredményt alaposan továbbfejlesztették: ebből lett a „PCP-tétel” (probabilistically checkable proofs). Sokan működtünk közre a kutatási folyamatban a világ minden tájáról, többek között Szegedy Márió is, valamint Babai Lászlónak és munkatársainak korábbi fontos eredményeire is építettünk.

L. M.: A Bolyai János Alkotói Díjat 2007-ben kaptad, nyilván általános elismerésként. 2008-ban a Széchenyi-nagydíjat is nyilván az addigi munkásságodért kaptad, akárcsak a Bolyai-nagydíjat ugyanabban az évben. Időrendben a 2010-es Kiotó-díj következett.

L. L.: A Kiotó-díjat főleg az optimalizálás területén korábban elért eredményeimért kaptam. Az 1980-as években Martin Grötschellel és Alexander Schrijverrel írtunk egy monográfiát az ellipszoid módszer alkalmazásairól, amelyben szerepelt, hogy magas dimenzióban konvex halmazokra vonatkozó algoritmusok mikor végezhetők el polinomidőben. Ezt nagyon sokan idézik. Úgy gondolom, hogy ez motiválta a díj odaítélését, meg a perfekt gráfok körüli eredmények.

L. M.: A Fulkerson-díjat 2012-ben második alkalommal is megkaptad.

L. L.: Azt egyértelműen a gráflimesz elméletért kaptuk, pontosabban sűrű gráfok sorozataihoz tartozó limeszobjektum megkonstruálásáért, Szegedy Balázzsal közösen. 2006-ban jelent meg az erről szóló cikkünk.

L. M.: A következő elismerés nem díj, hanem cím: a 2017-ben odaítélt Neumann János-professzori cím. Azután 2019-ben kaptál egy Barcelona Hypatia Európai Tudományos Díjat, amelyet Barcelona város önkormányzata adományoz.

L. L.: Mégpedig az Academia Europaea-val közösen. Ez inkább tudománypolitikai jellegű elismerés, a kutatási eredmények mellett a tudomány területén vállalt közéleti szereplés méltatására. Előtte már voltam a Nemzetközi Matematikai Unió elnöke és a World Science Forum elnöke is, és abban az időben már az MTA elnöke voltam. Nemzetközi körökben pedig addigra már ismertté vált, hogy a magyar kormány nem bánik túl szépen a Magyar Tudományos Akadémiával. Ennek a díjnak az odaítélésében kicsit talán a magyar kormány bosszantásának szándéka is benne volt.

L. M.: A Hazám-díjat is nyilvánvalóan nem matematikai munkáidért kaptad 2020-ban. Az idei Abel-díj viszont szakmai elismerés, amelynek méltatásában konkrét eredményeket is megemlítenek, amelyek között kiemelt szerepet kapott az LLL-algoritmus.

L. L.: Az LLL-algoritmus (Lenstra–Lenstra–Lovász-féle algorimus) története érdekes. Említettem, hogy Martinnal (Martin Grötschel) és Lex-szel (Alexander Schrijver) írtunk egy könyvet az ellipszoid-módszer alkalmazásairól. A fő eredmény arról szól, hogy van egy konvex halmazod, és van hozzá egy segédalgoritmus – egy „fekete doboz" –, amelytől megkérdezheted, hogy egy pont benne van-e a konvex halmazban, vagy nincs, és ha nincs benne, akkor ad egy olyan síkot, amelyik elválasztja a halmazt a ponttól. Néhány egyszerű technikai feltétel mellett ezen a konvex halmazon bármely lineáris függvényt lehet optimalizálni. Ezt az eredményt „szeparálás és optimalizálás ekvivalenciájának" hívjuk. Hasonló tételeket mások is bizonyítottak, főleg arra az esetre, ha a konvex halmaz egy poliéder. Ha ez teljes dimenziós, akkor nincs gond, de ha a poliéder nem teljes dimenziós, akkor nem működik az algoritmus. Ezt általában valahogyan ki lehet játszani, kétféleképpen is. Az egyik trükk az, hogy az ember felfújja ezt a halmazt úgy, hogy még mindig ugyanaz maradjon az optimum. A másik azt használja ki, hogy ha annak az elválasztó síknak, amelyet ez a „fekete doboz" visszaad, korlátos, racionális együtthatói vannak, akkor még mindig működik az algoritmus. Ez azonban nem igazán természetes feltevés, mert ha például a segédalgoritmus a halmaz legközelebbi pontjához vezető szakasz felezőmerőlegesét adja vissza – ez egy teljesen normális elválasztó „fekete doboz" –, akkor nincs ilyen korlát az együtthatókra.

Ez bosszantott, mármint a nem igazán természetes feltétel, és felvetődött, hogy, ha az elválasztó hipersík együtthatói nem korlátos bonyolultságúak, akkor kerekíteni lehetne. Kiderült, hogy a jó kerekítés az együtthatóknak közös nevezőjű racionális számokkal történő közelítése, erről pedig jó 150 éve, Lejeune Dirichlet óta tudjuk, hogy lehetséges. Ám hogyan lehet ezt kiszámítani? Némi gondolkodás után találtam erre egy algoritmust (bázisredukció algoritmusnak hívják), és megírtam a két Lenstrának (Arjen és Hendrik testvérpár – *a szerkesztő megjegyzése*), akik fellelkesedtek, és visszaírták, hogy ezt használva ők egész együtthatós polinomokat polinomiális időben tudnak irreducibilis faktorokra bontani. Ebből lett az 1982-es LLL-cikk, két évre rá pedig Andrew Odlyzko és Jeffrey Lagarias közölt egy cikket, amelyben ezt az algoritmust arra használták, hogy feltörjenek vele egy bizonyos kriptográfiai rendszert. Tehát megmutatták, hogy az nem biztonságos. Utána sok más esetben is alkalmazták, a kriptográfiában gyakran használt eszköz lett. Majd pedig Ajtai Miklósnak és másoknak sikerült azt megfordítani, és egy olyan kriptográfiai rendszert előállítani, amelyet jelenleg nem használnak ugyan, mert eléggé nehézkes, de megvan az az előnye, hogy a jelenlegi tudásunk szerint még kvantumszámítógéppel sem lehet feltörni, míg a szokásos RSA-kód feltörhető.

L. M.: Ha már erről az algoritmusról van szó, egyszer említetted nekem, hogy az LLL-eljárás végső formájának kialakításában esztétikai szempontok is közrejátszottak.

L. L.: Itt arra utaltam, hogy az optimalizálás és szeparálás ekvivalenciájánál a korábban említett két trükk szinte mindig működött, de esztétikai szempontból nem volt megnyugtató, hogy ad hoc trükköket kelljen bevetni.

L. M.: Az eddig elhangzottak alapján a díjakat felidézve már képet kaptunk arról, hogy mi mindennel foglalkoztál. A következőkben megpróbálunk időrendben haladni a munkásságodra vonatkozóan, hogy kirajzolódjon a pályaképed. A kezdetekre visszatekintve azt tudom, hogy édesapád neves sebészorvos volt, és a testvéred is ugyanazt a hivatást választotta. A te esetedben volt-e külső nyomás vagy legalábbis késztetés, hogy hozzájuk hasonlóan orvos legyél?

L. L.: Engem nem vonzott az orvosi szakma, apám tevékenységén láttam, hogy az mennyi időt, energiát és fáradságot kíván. Orvos lévén reggel fél hétkor elment, aztán esetleg hazajött vacsorázni, majd visszament éjjeli ügyeletre, borzasztó megterhelésnek volt kitéve. Ő talán örült volna, ha én is orvos leszek, de megértette, hogy nekem eltérő az érdeklődésem. Nyolcadikban még a mérnöki pálya érdekelt.

L. M.: Az általános iskolában milyen módon találkoztál a matematikával?

L. L.: A Sziget utcai általános iskolában volt egy szakkör, amelyet Bellay László, az iskola igazgatója vezetett. Érdekes feladatokat adott, én pedig könnyen és élvezettel megoldottam azokat.

L. M.: A KöMaL-t például a kezedbe adták?

L. L.: Igen, nyolcadikos koromban, és javasolták, hogy fizessek is elő a *Középiskolai Matematikai Lapok*ra. Emlékszem, hogy csodálatos érzés fogott el, amikor először a kezemben tartottam a folyóirat egy példányát. Talán éppen abban olvastam Erdős Pali bácsi cikkét a kombinatorikus geometriáról.

L. M.: A Fazekas Gimnáziumba – gondolom – a versenyeredményeid alapján hívtak meg.

L. L.: Nem egészen. Bellay felesége a Fazekasban tanított, és tudott arról, hogy ott egy speciális matematikai osztály indul. Bellay eljött a szüleimhez, és ő javasolta, hogy írassanak be a Fazekasba.

L. M.: A Fazekas-beli négy évről nem kérdezlek. Erről annyi interjú, nyilatkozat, újságcikk, sőt dokumentumfilm is készült, hogy ezt most kihagyhatjuk. De úgy tudom, hogy gimnazista korodban rendszeresen jártál Gallai Tiborhoz. Hogy kerültél hozzá?

L. L.: Matematikatanárunk, Rábai Imre ajánlott be. Először Surányi Jánoshoz, aki számelméletet tanított, aztán (talán részben Surányi javaslatára) Gallaihoz, akivel gráfelméletről beszélgettünk.

L. M.: Úgy tudom, Gallaihoz Pósa Lajos is járt.

L. L.: Pósa Lajos akkoriban már Erdőssel dolgozott, és közösen írtak több cikket is. Az egyikben egy amerikai matematikus, Adolph Goodman is közreműködött. A cikkben szerepelt egy tétel, amely szerint minden n pontból álló gráf lefedhető legfeljebb $n^2/4$ éllel és háromszöggel, és akkor Lajos mintegy kihívásként mondta nekem, hogy próbáljam ezt bebizonyítani. Meg is tettem, maga a bizonyítás nem is volt nagyon nehéz. Lajos erről beszámolt Pali bácsinak, aki ezután a cikk szövegéhez hozzáírta, hogy ezt a tételt én tőlük függetlenül bebizonyítottam, ami nem volt teljesen igaz, hiszen az óriási segítség, ha az ember tudja, hogy amit bizonyítani akar, az igaz. Ez is példázza, hogy Pali bácsi mennyire igyekezett előmozdítani a fiatalok karrierjét. Később sokszor dolgoztunk együtt vele. Pali bácsi néha a Royal szállóban lakott, amikor Budapesten volt – már nem emlékszem, hogy miért nem az édesanyja lakásában –, és a hotel halljában ücsörgött, körülötte a sok fiatallal, köztük volt gyakran Juhász István, Bollobás Béla, Simonovits Miklós. Pali bácsi mondott problémákat, és ha valakinek volt ötlete a megoldásra, akkor megbeszélte vele. Ez egy egész napos program volt!

L. M.: Később Pali bácsi az Akadémia vendégházában lakott, a budai Várnegyedben.

L. L.: Igen, és ott is fogadta a fiatalokat, de voltam nála az édesanyja lakásán is.

L. M.: Gallai Tiborhoz is jártál.

L. L.: Igen, vele a párosítási (matching) problémáról beszéltünk. Diákköri dolgozatot készítettem belőle, és Sós Vera javaslatára abból kandidátusi értekezés is készült.

L. M.: A szakcikkeken kívül könyveket is írtál, sőt ebben is termékeny szerzőnek bizonyultál.

L. L.: Az első angol nyelvű könyvem egy feladatgyűjtemény volt. Rábai Imre rábeszélésére többen nekiláttunk, hogy a Pólya–Szegő-féle híres analízis-feladatgyűjtemény mintájára más témából is összeállítsunk hasonlót. Évekbe telt, mire az enyém elkészült, és meg is jelent.

L. M.: Később a *Matching Theory* című könyvedet is kiadták.

L. L.: Azt Michael Plummerral írtam, annak hatására, hogy együtt dolgoztam vele Nashville-ben, a Vanderbilt Egyetemen. Utána Plummer kétszer is járt Magyarországon. Közös munkánk ezek után formálódott könyvvé. Mind a két könyvet újabban újra kiadta az Amerikai Matematikai Társulat.

L. M.: A diploma megszerzése után Szegedre kerültél.

L. L.: Leindler László, a Természettudományi Kar dékánja keresett meg 1975-ben, hogy felkérjen a Geometriai Tanszék vezetésére. Az ott töltött időszak nagyon termékeny volt a munkámban, és amúgy is jól éreztem magam Szegeden.

L. M.: 1982-ben mégis otthagytad Szegedet, és visszatértél az ELTE-re.

L. L.: Annak tudománypolitikai okai voltak. Az akkori kormányzat – Aczél György kezdeményezésére – megpróbálta átszervezni az ELTE-n, az Eötvös Loránd Tudományegyetemen folyó matematikusképzést. Egy Elméleti Matematikai Intézetet akartak létrehozni Császár Ákos vezetésével, és egy Alkalmazott Matematikai Intézetet, amelynek én lettem volna az élén. Ez a kísérlet azonban sikertelen maradt, az Alkalmazott Matematikai Intézet nem jött létre. Viszont jórészt Babai László erőfeszítéseinek hatására megalakult a Számítógép-tudományi Tanszék. Odakerült Beck József, Frank András, Recski András, és másik tanszékről még hárman, Elekes György, Pósa Lajos és Simonovits Miklós. Nem akarom most az e mögött álló politikai és személyes villongásokat részletezni, de ez az időszak korántsem volt annyira kellemes, mint a Szegeden töltött évek. Joel Spencer, aki éppen akkor egy évig a Matematikai Kutatóintézetben dolgozott Budapesten, úgy fogalmazott, hogy a helyzet egy görög sorstragédia hangulatát idézte fel benne. 1984 tavaszán el is mentem külföldre, előbb Bonnba egy évre, majd fél-fél évre a Cornell, illetve a Berkeley Egyetemre.

L. M.: A Berkeley Egyetemen töltött időszakod alatt tartották ott a Nemzetközi Matematikai Unió Kongresszusát, amelyiken én is részt vettem, és eszembe jut egy emlékezetes vacsora.

L. L.: Igen, szokás volt ezeken a kongresszusokon, hogy a magyarok, itthoniak és külföldön élők, összejönnek. Ez a vacsora ezen a kongresszuson nálunk volt.

L. M.: A külföldön töltött évek után hazatérve visszakerültél a Számítógép-tudományi Tanszékre.

L. L.: Igen, a tanszék addigi vezetője, Simonovits Miki pedig átkerült a Matematikai Kutatóintézetbe. A feszült időszak 1988-ig tartott, amikor Kádár János hatalomvesztésével 180 fokos fordulat következett be az ELTE matematikai életében.

L. M.: De közben te már Princetonban dolgoztál.

L. L.: Részidőben, néha fél évet, máskor egy egész évet Princetonban dolgoztam. Ez utóbbi alkalmakkor a DIMACS (Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science) programban vettem részt. Ezt a Rutgers Egyetem koordinálta, de a princetoniak is közreműködtek. A magyarok közül Beck József, Boros Endre, Komlós János és Prékopa András dolgozott e program keretében, később Szemerédi Endre is. Hajnal András pedig akkor lett a DIMACS igazgatója, amikor én 1993-ban átkerültem a Yale Egyetemre.

L. M.: Itt mivel foglalkoztál?

L. L.: 1989-től majdnem tíz évig a térfogat-algoritmus kérdése volt a központi témám, Simonovits Mikivel és Ravi Kannannal együtt dolgozva.

L. M.: Motiváció szintjén van-e köze ennek a munkának az LLL-algoritmushoz?

L. L.: Nagyon áttételesen. Konvex halmazokra vonatkozó algoritmusokkal foglalkozva természetes volt a kérdés, hogy ki lehet-e számítani a térfogatot magas dimenzióban hatékonyan (vagyis polinomiális időben). Ezt a kérdést tettem fel Elekes György akkori aspiránsomnak, ő pedig egy nagyon szép bizonyítással állt elő, hogy a térfogat determinisztikusan nem számítható ki hatékonyan: bármilyen polinomiális időben kiszámítható becslésnek, valamilyen konvex halmazra, exponenciálisan nagy lesz a hibája a dimenzió függvényében. Utána Bárány Imre és Füredi Zoltán pontosabb bizonyítást dolgozott ki, még erősebb korlátot adva. Akkor felvetődött a kérdés, hogy hatékony randomizált (véletlent használó) algoritmus lehetséges-e, és Ravi Kannan munkatársaival, Martin Dyerrel és Alan Frieze-zel csinált egy polinomiális idejű randomizált algoritmust, Markov-láncokra alapozva. Ez már önmagában is nagyon érdekes: bizonyítható, hogy determinisztikusan nem lehet valamit megtenni, véletlent használva pedig lehet. Az eredeti randomizált algoritmus n^{29} nagyságrendű időt igényelt; ez polinomiális, de csillagászati idő. Több és több matematikai eszközt bevetve, mi n^7-ig javítottuk Mikivel és Ravival, majd n^4-ig Santosh Vempalával. Néhány hónappal ezelőtti hír, hogy Yuansi Chen tovább javított rajta, sikerült a futási időt n^3 közelébe lenyomni. A kérdés tehát az LLL-algoritmus felől jött, és Elekes Gyuri eredménye motiválta a további kutatást.

L. M.: Dolgoztál a Microsoftnál is; ez hogyan alakult így?

L. L.: Néhány amerikai év után már készülődtünk a hazatérésre, amikor állásajánlatot kaptam Jennifer Chayestől, a Microsoft kutatójától, ebből pedig további hét, Amerikában töltött év lett. Seattle-ben a Microsoft Elméleti Csoportnak nevezett egységében dolgoztam matematikai problémákon. Nagyon jó időszak volt, olyan matematikusok társaságában, mint a Fields-érmes Michael Freedman topológus, aki már akkor kvantumszámítógépekkel kezdett foglalkozni. Oded Schramm kutatási területe pedig komplex függvénytan volt, de valószínűség-számítással kombinálva. Szerintem ő is megérdemelte volna a Fields-érmet. Nagyon sokat lehetett tanulni egymástól.

L. M.: Volt-e olyan gyakorlati probléma, amelyet a Microsoft más munkatársai vetettek fel, és érdemesnek tartottad, hogy foglalkozzál azzal?

L. L.: Igen, volt, és rögtön a náluk töltött időszak elején. Szerencsére sikerült Kati és volt diákom, Vu Ha Van segítségével megoldanom. (Lovász László felesége, Vesztergombi Katalin, ugyancsak neves matematikus – *a szerkesztő megjegyzése.*) Egy optimalizálási feladat volt, amelynek megoldása során az algoritmizálásnál megakadtak, és ez hónapokkal késleltette a Windows Server 2003 piacra kerülését. Cikket ugyan nem írtam belőle, bár egy egyetemi szintű feladatgyűjteményben ott lenne a helye. Az, hogy sikerült hamar megoldani, alaposan megnövelte az egész csoport ázsióját. Később is voltak ilyen jellegű eredményeim, bár azok már nem váltottak ki akkora hatást.

L. M.: Miért és hogyan ért véget a Microsoftnál töltött időszak?

L. L.: Mindenképpen haza akartunk jönni, méghozzá akkor, amikor még van esély visszaintegrálódni a munkába, tehát a nyugdíjas kor előtt. Laci fiam akkor került gimnazista korba. A Fazekasban tanult, mert hazaköltözött Katival, én viszont még egy évig kint maradtam, közben persze sokszor hazalátogattam. Amikor már én is hazaköltöztem, még akkor is ingáztam egy évig a két ország között.

L. M.: A gráflimesz probléma akkor már létezett, ugye?

L. L.: Ennek érdekes a története, mert a projekt több helyi forrásból indult. Az egyik az volt, hogy Mike Freedman a kvantumszámítógéphez valamilyen speciális kristályszerkezetet keresett, amelynek a tulajdonságait a statisztikus fizikai modelljének partíciófüggvénye adta meg. Az volt tehát a kérdés, hogy van-e olyan fizikai modell, amelynek éppen ez az adott függvény a partíciófüggvénye. Maga a partíciófüggvény egy számot rendel minden gráfhoz, ami másképpen fogalmazva azt adja meg, hogy ennek a gráfnak hány homomorfizmusa van egy másik, rögzített gráfba. A kérdés az, hogy mikor állítható elő ilyen alakban egy gráfokon értelmezett függvény. Ezt sikerült megválaszolnunk Lex Schrijverrel és Mike Freedmann-nal, és írtunk róla egy cikket.

L. M.: Ez mikor történt?

L. L.: 2003-ban. (A matematikai folyóiratok malmai lassan őrölnek – 2007-ben jelent meg.) A másik forrás a növekvő gráf modell. Akkoriban terjedt el szélesebb szakmai körben az akkor már Amerikában dolgozó Albert Réka és Barabási Albert-László ezzel kapcsolatos munkája. Jennifer Chayes vetette fel, hogy talán van ebben valamiféle határeloszlás-tétel. Mi történik a „végtelenben", ha a gráf véletlen módon minden határon túl növekszik? Ekkor eszembe jutott a Tarski-probléma megoldása. Úgy találtam, hogy „megfogható" a probléma, ha megszámoljuk, hogy hány él és hány háromszög van ezekben a gráfokban a maximális lehetséges számhoz képest, és általában, hányféleképpen lehet leképezni beléjük egy adott gráfot, és megnézzük, hogy ezek a számok konvergálnak-e valahová. Sós Vera is éppen ott volt látogatóban, és ő vetette fel, hogy nem lehet-e egy Chung–Graham–Wilson-féle eredményt (amely szerint, ha egy gráfsorozatban a négyszögek sűrűsége aszimptotikusan egyenlő az élsűrűségek negyedik hatványával, akkor azok kvázi-véletlen gráfok) így általánosítani? Mindezeket kombinálva kezdtük el kidolgozni Jennifer Chayes, Christian Borgs, Sós Vera és Vesztergombi Kati társaságában a sűrű gráfok limeszelméletét. Egy ebéd közben pedig kiderült, hogy Oded Schramm kollégánk viszont a ritka (korlátos fokú) gráfok limeszelméletével foglalkozott éppen. Azóta a két elmélet hol párhuzamosan, hol egymást motiválva fejlődött.

Közben a csapatunk is bővült. Mike-kal és Lex-szel hármasban elkezdtük nézni, hogy egy más értelemben vett statisztikus fizikai modell partíciófüggvényét – az egyik az élszínezés, a másik a pontszínezés modellje – milyen módon lehetne jellemezni, de csak egy sejtésig jutottunk, amelyet nem sikerült bebizonyítanunk. Ezt elmondtam Szegedy Balázsnak, aki akkor posztdoktorként volt ott, ő pedig hipp-hopp, egy hét alatt hozta is a megoldást, egy sokkal mélyebb algebrai módszert alkalmazva. Ettől kezdve Balázst is bevontuk a projektbe. Ekkor írtuk azt a cikket, amelyért a közös Fulkerson-díjat kaptuk.

L. M.: Vagyis Te már másodszor részesültél ebben az elismerésben.

L. L.: Igen, ez 2012-ben volt. Az eredmény elérése és a szakcikk közlése között olykor sok év telik el. A sűrű gráfok sorozatainak limeszfüggvényekkel való jellemzését taglaló cikk esetében is ez történt. Idetartozik még, hogy talán 2004-ben, amikor Magyarország és az USA között ingáztam, tartottam erről egy kurzust az ELTE-n, amelynek hallgatósága fantasztikus volt, a padsorokban ott ült Bárász Mihály, Elek Gábor, Kun Gábor, Lippner Gábor, hogy csak azokat emeljem ki, akik később dolgoztak is ebben a témában. Néhányan mások is rávetették magukat, köztük Csóka Endrével és Kunszenti-Kovács Dáviddal ma is dolgozunk rajta.

L. M.: Már a közelmúlthoz érkeztünk. A 2012-ben megjelent könyved után még akadémiai elnökként is tudtál időt szakítani szakkönyv írására.

L. L.: A *Graphs and Geometry* című könyvet az Amerikai Matematikai Társaság adta ki 2019-ben. Ebben a műben azt próbáltam összegyűjteni, hogy mit mond egy gráfról az, hogy különféle geometriai módokon lehet ábrázolni, például, hogy hogyan lehet beágyazni a síkba vagy térbe. Ez a téma nagyon érdekelt engem.

L. M.: Tulajdonképpen az ortogonális reprezentáció is része ennek a témának.

L. L.: És még sok más, rúdszerkezetek merevségétől gráfok poliéderek élhálójaként való reprezentálásáig.

L. M.: A tudományos kutatás mellett jelentős a tudományos közéleti tevékenységed is. Az MTA elnöki pozíciójának betöltése előtt a Nemzetközi Matematikai Unió (International Mathematical Union, IMU) elnöke voltál.

L. L.: 2006 és 2010 között voltam az IMU elnöke, és a matematikusok világszervezetének alapszabálya szerint utána még négy évig vezetőségi tag maradtam Past Presidentként.

L. M.: Azaz, amint visszatértél Magyarországra a Microsofttól, a nyakadba szakadtak a tudományszervezési feladatok. Mekkora terhet jelentettek ezek?

L. L.: Az IMU elnöki tisztével járó feladatok ellátása nem kötötte le túl sok időmet és energiámat.

L. M.: De rengeteget kellett utaznod ennek kapcsán, nem?

L. L.: Persze, kellett utaznom, ám azok az utak érdekesek voltak. Talán az elnöki ciklus utolsó fél éve volt sűrű időszak, mivel nagyon oda kellett figyelni a ciklust záró kongresszus előkészítésére. Mindenesetre a matematikai világszervezet elnöki teendőinek ellátása utólag jelentéktelennek tűnik az MTA elnöki tisztével járó terhekkel összevetve.

L. M.: Ezt el is tudom képzelni. Visszakanyarodva a tudományhoz: van-e átfogó koncepciód a gráflimesz elmélettel kapcsolatos munka folytatására, esetleg lezárására?

L. L.: Ez a munka nincs lezárva, valószínűleg sokáig nem is lesz. Például a limeszelmélet csak a két szélső esetre van kész állapotban, a sűrű gráfokra és a korlátos fokú gráfokra. Szegedy Balázzsal és Kunszenti-Kovács Dáviddal keményen dolgozunk a közepes sűrűségű gráfokra való kiterjesztésén. Mások is próbálkoznak az elmélet továbbfejlesztésével, nekünk viszont van ötletünk egy jelentősebb kiterjesztésre (és persze úgy gondoljuk, hogy ez az igazi…). Ehhez a Markov-láncok elméletét hívjuk segítségül, mert ami közös és általánosítható, az a gráfokon való bolyongás. Annak talán kidolgozható a limeszelmélete, amihez viszont sok mértékelmélet kell. Úgyhogy most mértékelméletet tanulgatok. És még funkcionálanalízis is kell hozzá, mindenféle kompakt operátorokkal. Ez az egyik irány, amelyikben szeretnénk tisztábban látni.

A másik irány kicsit kérdőjelesebb: mi a helyzet az olyan nagy gráfokkal, amelyeken valamilyen akció is végbemegy? Például az interneten mint hálózaton információcsere folyik. Egy másik példa akár a járványterjedés is lehet. Milyen lefutások lehetségesek az ilyen hálózatokon? Mondjuk, hogy ezer fertőzött van az országban, akkor mi a rosszabb, ha az összes fertőzött Budapesten van, vagy ha elszórtan élnek kisebb településeken az egész ország területén? Erre nem egyértelmű a válasz, és már egy tételünk is van erre: ez a terjedési sebességtől függ, eléggé általános feltételek mellett. Nagyon lassú terjedés esetén a budapesti góc rosszabb, mert a nagyvárosban több kapcsolatuk van az embereknek. Gyorsabb terjedés esetén viszont a vidék van nagyobb veszélynek kitéve. Nagyon nagy terjedési sebességnél pedig mindegy, akkor úgyis mindenki megfertőződik. Ez csak egy példa volt, az általános kérdés úgy tehető fel, hogy lehet-e általánosítani ezeket a limeszmódszereket és a nagyon nagy gráfok tanulmányozásának más módszereit dinamikus hálózatokra? Esetleg maga a hálózat is változhat. Van egy-két szép eredmény, például Ráth Balázs és Szakács László munkája, amelynél egyszerű szabály szerint változik a gráf, és a változást a limesztérbe vetítve differenciálegyenletek írhatók fel. Maga a téma óriási, várhatóan érdekes eredményekre lehet jutni.

L. M.: Most ezt tekinted a fő kutatási irányodnak?

L. L.: Igen, általánosan értve. Gondolom, hozzád is közel áll az az észrevétel, hogy ha veszel egy szimmetrikus mértéket a négyzet Borel-halmazain, akkor ez valamilyen értelemben általánosít egy gráfot. Felvetődik, hogy mi az a gráfelméletből, aminek értelme van ebben az általános modellben? Kiderül, hogy sok mindennek van értelme, például a folyamatelmélet szinte egy az egyben általánosítható.

L. M.: Erről most írtál is egy hosszú tanulmányt.

L. L.: Igen, a *Geometric and Functional Analysis* folyóiratban jelent meg. Az egyik legfőbb probléma, amin dolgozunk, hogy hogyan lehet egy véges gráfnak, mondjuk egy ötszögnek, egy véletlen példányát értelmezni a végtelen limeszben? Véges gráfból könnyű egy véletlenszerű ötszöget kiválasztani (feltéve, hogy van benne): felsoroljuk az összes ötszöget, beletesszük egy kalapba, és kihúzunk egyet. Szegedy Balázzsal és Kunszenti-Kovács Dáviddal együttműködve ezt sikerült valamilyen értelemben a végtelen limeszre is általánosítani, meglepően nem triviális módon.

L. M.: Milyen terveid vannak a járvány lecsengését követő időszakra?

L. L.: Nyilván előbb-utóbb végiglátogatjuk a gyerekeinket Amerikában, és talán nyáron egyikük-másikuk haza is tud jönni családostól, mert addigra be lesznek oltva. Hosszú időt már nem akarok külföldön tölteni, legfeljebb egy-egy hónapot, Amszterdamban, Berlinben, Princetonban vagy Berkeley-ben. Matekot csinálni viszont jó lenne még egy ideig.

L. M.: Még egy darabig talán fogunk is. Több kérdésem most nincs. Van-e olyasmi, ami eddig nem került szóba, de szívesen megemlítenéd?

L. L.: Igen, de ez inkább Erdős Pali bácsiról szól, mint rólam. Egyik sokat idézett fiatalkori eredményem az elemi valószínűség-számítás területéről van, lokális lemmának hívják. Ez egy közös cikkünkben jelent meg, de Erdős minden előadásában hangsúlyozta, hogy ez az én eredményem volt. Ilyen gesztusra nem sok ember képes.