

FRAKTÁLALAKZATOK A SZÁMÍTÓGÉPES ZENÉBEN

Charles Dodge *Profile* című művének bemutatása

FRACTALS IN COMPUTER MUSIC

Analysis of *Profile* composed by Charles Dodge

Baráth Bálint

doktorandusz, Liszt Ferenc Zeneművészeti Egyetem, Budapest
ittisottis@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÁS

A számítógépek megjelenése lehetővé tette a fraktálok nemcsak képi, hanem hang felhasználását is, különböző speciális, zenei környezetre szabott algoritmusok segítségével. A számítógépes zeneszerzés során alapvetően két irányban használhatjuk fel a komputeres lenyűgöző pontosságú rendszeralkotó képességét, noha ezt a két területet sokszor nehéz egymástól elválasztani. A kettő közül kétségtelenül a kiterjedt felhasználási módokkal rendelkező digitális jelfeldolgozás az ismertebb. A digitális térben szinte kimeríthetetlenül sokféle hangzást tudunk generálni többféle szintézistechnika használatával, vagy a már létező, majd később rögzített hangokat tudjuk vég nélkül kombinálható eljárásokkal átalakítani. Kevésbé ismert terület a számítógéppel segített zeneszerzés (azaz Computer-Aided Composition – CAC), amely során a hangzások helyett hangjegyeket, általánosabb értelemben zenei szimbólumokat manipulálunk.

ABSTRACT

The advent of computers has made it possible to use fractals not only visually but also in music generation, using various special algorithms tailored to the musical environment. In computer-based composing, we can basically use the impressive capability of computers in two directions, although these two areas are often difficult to separate. Of the two, digital signal processing with extensive uses is undoubtedly better known. In the digital space, we can generate an almost inexhaustible variety of sounds using several synthesis techniques, or we can transform already existing sounds with endlessly combinable methods. A lesser known area is Computer-Aided Composition (CAC), in which we manipulate notes and musical symbols instead of sounds.

Kulcsszavak: fraktál, számítógéppel segített zeneszerzés, algoritmus, automatizált művelet

Keywords: fractal, Computer-Aided Composition, algorithm, automated procedure

BEVEZETÉS

A fraktálok igazán különös objektumok. Különlegességük elsősorban a szerkezetükben jelenik meg, előfordulásukat tekintve azonban hétköznapiak mondhatók. A természetben lépten-nyomon találkozunk velük, ha a fák leveleinek erezetét szemléljük, a felhők formáit fürkésszük, vagy ha éppen egy kezünkbe hulló hópehely alakját vesszük szemügyre. A fraktálok már a 19. század végén feltűntek a matematikusok horizontján, az elsőként nyilvánosságra hozott fraktálalakzat a Weierstrass-függvény volt. Ebben az időben azonban úgy tekintettek az efféle alakzatra, mint a deviancia megtestesítőjére, az idealizált geometria csúfolódó inverzére. A problémát többek között a differenciálhatóság hiánya jelentette. Ettől függetlenül nem kerültek ki teljesen a matematikusok látószögéből. A 20. század első felében további fraktálokat fedeztek fel, közülük később híressé váltak a Julia-halmazok. A halmazok elméletének nehézsége azonban megakadályozta, hogy szélesebb közönséghez eljuthassanak. A fraktálok népszerűvé válásához Benoît Mandelbrot munkássága adta a legnagyobb lökést. Mandelbrot nevezte el ezeket a szokatlan konstrukciókat fraktáloknak, a latin *fractus* (törés; törött) szóból, mely az objektumok tört dimenziójára utal. Ugyancsak ő vezette be a fraktálgeometriát is, amely az euklideszi geometrián belül vizsgálja ezeket a bonyolult alakzatokat. A fraktálgeometria megjelenése lehetővé tette olyan formák leírását, amelyeket azelőtt formátlannak, alaktalannak tekintettek. A tudomány sok területe használja, többek között bizonyos kristályok növekedésének leírására, a csontok szerkezetének tanulmányozására vagy komplex, háromdimenziós adattömbök készítésére.

Az algoritmikus művészetben az 1980-as évek közepén kezdtek megjelenni a fraktálok, mivel a számítógépes technika ekkor vált elég fejletté ahhoz, hogy lehetővé tegye a fraktálokat leíró adatmennyiség feldolgozását. A személyi számítógépek megjelenése nagymértékben hozzájárult az egyébként igencsak számításigényes feladat akár otthoni környezetben történő végrehajtásához. Ez lendületet adott az eltérő területen dolgozó művészek számára egy új tematika létrehozására, de elsősorban a vizuális területen terjedt el és alakult ki a fraktálművészet. Az egyszerűtől a szinte már alakatlanul komplex formáig terjedő skálán sokféle alakzat alkotható a fraktálgeometria segítségével.

A számítógépek megjelenése lehetővé tette a fraktálok nemcsak képi, hanem hangfelhasználását is, különböző speciális, zenei környezetre szabott algoritmusok segítségével. A számítógépes zeneszerzés során alapvetően két irányban használhatjuk fel a komputerek lenyűgöző pontosságú rendszeralkotó képességét, noha ezt a két területet sokszor nehéz egymástól elválasztani. A kettő közül kétségtelenül a kiterjedt felhasználási módokkal rendelkező digitális jelfeldolgozás az ismertebb. A digitális térben szinte kimeríthetetlenül sokféle hangzást tudunk generálni többféle szintézistechnika használatával, vagy a már létező, majd ké-

sőbb rögzített hangokat tudjuk vég nélkül kombinálható eljárásokkal átalakítani. Kevésbé ismert terület a számítógéppel segített zeneszerzés (Computer-Aided Composition, továbbiakban CAC), amely során a hangzások helyett hangjegyeket, általánosabb értelemben zenei szimbólumokat manipulálunk.

A CAC alkalmazásával automatizált műveleteket használunk fel arra, hogy bizonyos zenei folyamatokat előre megírt összefüggések alapján hozzunk létre. Egy meghatározott alapállásból felállítunk kiinduló szabályokat, amelyeket addig futtatunk, amíg az eredmény kielégítő nem lesz. Lényegében tehát kihasználjuk a számítógép nagyon gyors számítási kapacitását arra, hogy nagy változékonyságú adatot generáljunk, majd az eredményt beillesztjük a kompozícióba, vagy további átalakítások forrásaként használjuk. Ma sok művész használ tudományos adatokat és folyamatleírásokat arra, hogy a zenében bizonyos paramétereket vagy akár teljes struktúrákat vezéreljen vele. A CAC-nak sokféle változata van, attól függően, hogy melyik folyamatot milyen mértékben befolyásoljuk a számítógéppel. Az elmúlt években kiváló eredmények születtek azzal a szándékkal, hogy a CAC-ot összekapcsolják a jelfeldolgozással, emellett lehetőséget teremtsenek arra, hogy a zeneszerző valós időben is képes legyen hatást gyakorolni az éppen kialakuló kottára.

A zeneszerzés szempontjából a CAC metódusai hasonlítanak a komputergrafika eljárásaira. Mivel számos egyezési pontot találhatunk a két terület között, adódik a gondolat, hogy ezeket a pontokat összekössük. Egy vizuálisan megjelenített fraktál adaptálható a zenei környezetbe, ahogy azt később látni fogjuk.

A FRAKTÁLZAJOK

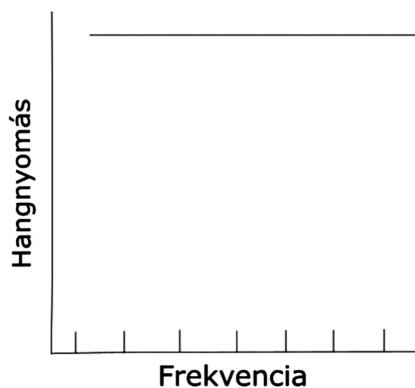
Ha a számítógépes zeneszerzésről van szó, megkerülhetetlen a zene és a matematika kapcsolatának felismerése. Számos példa adódik a zenetörténetben, amely bizonyítja, hogy a zeneszerzők az Ars Novától napjainkig előszeretettel használtak matematikai összefüggéseket műveik létrehozásában. Ugyanakkor nem fér kétség hozzá, hogy egy zenemű megalkotásához nem elegendő egy jól kezelhető matematikai formula. Egy adott összefüggésrendszeren belül születő eredményeket alkalmazni kell a zenei paraméterekre (hangmagasság, hanghossz, hangerőség, hangszín), majd meg kell valósítani a magasabb rendű összeköttetéseket a kialakuló részek között. Ez már a zeneszerző feladata. Mindemellett gyakran felmerül a kérdés, hogy milyen mértékben használja fel egy zeneszerző az algoritmus által generált értékeket. Ez nagyban függ az igénybe vett eljárás felépítésétől, illetve az alkalmazott hangzóanyagok sokszínűségétől.¹

¹ Itt a hagyományos hangszerek hangjai mellett a rögzíthető és szintetizálható hangok végtelenül sokféle hangzástípusaira gondolok.

A CAC során számos esetben használunk véletlenszerű folyamatokat, ez a számítógépes zeneszerzés bevett gyakorlata. Amellett, hogy a nem várt módon kialakuló értékek megfigyelése inspirációs forrásként is szolgálhat, a generálás során megjelenhetnek olyan összefüggések, amelyekre a felhasználó nem is gondolt. Az ilyen típusú felismerés megtapasztalására igazán alkalmasak a véletlengenerátorok.

Véletlen számsorozatot sokféleképpen készíthetünk. A leggyakrabban használt szoftveres megoldás a pszeudo-véletlenszám generátor, amely egy algoritmus segítségével állítja elő a sorozatokat. Egy ilyen generátor felhasználásával ugyan véletlenszerűnek tűnő szériát kapunk, de fontos tudni, hogy ez determinisztikus módszer, tehát a kezdőparamétertől függően egy idő után ismétlődni fog az eredmény.

További lehetőség a fraktálzajok² alkalmazása. Ezeket a zajokat a spektrális sűrűség mértékének segítségével lehet meghatározni. A spektrális sűrűség a zaj teljesítményének frekvenciában mért eloszlását adja meg. A spektrális jellemző csupán a véletlen értékek szekvenciájára utal, az akusztikai spektrumra nem vonatkozik. Az első és alapvető fraktálzaj a fehér zaj. A fehér zajban a spektrális sűrűség az $1/f^0$ relációval jellemezhető, a hangnyomásszint minden frekvenciánál azonos. Az 1. ábrán a fehér zaj spektrumának grafikonja látható. A 2. ábra egy zenei példát mutat. Az ábra elkészítéséhez a Max/MSP-programnyelv és



1. ábra

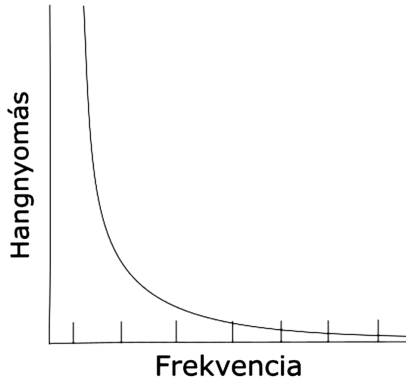


2. ábra

² A fraktálzaj kifejezést Benoît Mandelbrot és John W. Van Ness alkotta meg 1968-ban.

a BACH-kiterjesztés segítségével bizonyos időközönként mintát vettem a fehér zajból, és a kapott értéket ritmuskvantálás után hozzárendeltem a 12 hangú skála³ valamely fokához. Jól látható, hogy az egyes hangoknak nincs belső összetartásuk, a soron következő hangjegy független az előtte lévőktől. Ez a tulajdonság akkor sem változna, ha jóval több ütemen keresztül figyelnék meg az eredményt. A folyamat kimenetele a kockadobásra hasonlít, amely során a kocka dobásából kapott számok semmilyen összefüggésben nincsenek egymással.

A fehér zajjal ellentétben a Brown-zajban az egymás után érkező értékek erős korrelációt mutatnak. Ennek a zajnak a spektrális sűrűsége az $1/f^2$ relációval írható le, amelyet a 3. ábra mutat. A 4. ábrán a zenei példa található azonos paraméterekkel és eljárással, mint a 2. ábra esetében. Megfigyelhető, hogy a dallamvonalnak nincs tiszta iránya, és többször nem várt módon lép ugyanarra a hangra.



3. ábra



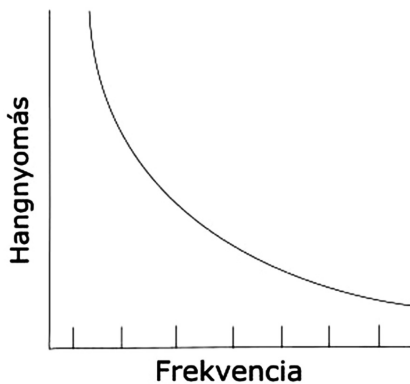
4. ábra

Azokat a zajokat hívhatjuk fraktálzajoknak, amelyeknek spektruma az $1/f^y$ formula szerint csökken, ahol $0 \leq y \leq 2$. Ennek a zajcsaládnak egy különös tagja a rózsazaj. Spektrális sűrűségét az $1/f$ reláció jellemzi, amely az 5. ábrán látható.

A 6. ábra egy zenei példát szemléltet, amelyben megfigyelhető, hogy a rózsazaj a fehér zaj és a Brown-zaj között helyezkedik el, ezért zenei szempontból a legjobban használható. Mivel a rózsazajban a kurrens és az azt megelőző értékek

³ Skála: „valamely hangrendszerből kiszakított részlet, mégpedig annyi fok van benne, ahány különféle hang az illető hangrendszerben” (Böhm, 2000).

között logaritmikus összefüggés van, ez a zaj egyfajta hosszú távú memóriával rendelkezik. A legutóbbi tíz értéknek annyi befolyása van a vizsgált értékre, mint amennyire a legutóbbi száz vagy ezer értéknek lenne.



5. ábra



6. ábra

CHARLES DODGE PROFILE CÍMŰ MŰVÉNEK ALGORITMUSA

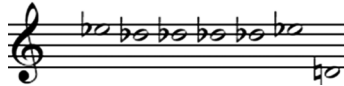
A *Profile* alkotója, Charles Dodge a számítógépes zeneszerzés egyik fő innovátora, elismert alakja. Számos cikk szerzője, a Columbia Egyetem és a Brooklyn College professzora. *Profile* című darabját 1984-ben fejezte be, melyhez az inspirációt a Mandelbrot-féle fraktálgeometria koncepciója adta. Dodge fő célja az volt, hogy egy számára esztétikailag megfelelő darabot hozzon létre kizárólag olyan algoritmusok használatával, amelyek fraktállal kapcsolatos számításokat végeznek.

A fraktálok vizsgálata során három fő tulajdonságot figyelhetünk meg. Az első a skálafüggetlenség, amely arra utal, hogy a különböző méretarányokra kicsinyítve-nagyítva a fraktál ugyanannyira egyenetlen lesz. A második a határlóvonalak érdekessége, gyűröttsége, amelyből az a furcsa következmény adódik, hogy végtelen sok iteráció után a fraktál hossza végtelen lesz. Nem metszi önmagát, és mivel véges térrészen marad, ezért véges területen végtelen hosszú lesz. A harmadik ismérv az ön hasonlóság, amely az első tulajdonságból ered. Ha egy fraktálalakzathoz bármelyik részt kiemeljük, az többé-kevésbé hasonlítani fog vagy az egész formára, vagy annak bizonyos részére.

Dodge a *Profile*-ban használt fraktálalgorithmus példájára a Koch-görbét hozza fel. Ezt a görbét úgy lehet elkészíteni, hogy egy szabályos háromszög oldalait elharmadoljuk, majd a középső harmadára ismét egy szabályos háromszöget rajzolunk, majd ezt a műveletet ismételjük.

A komponáláshoz használt algoritmus az $1/f$ zajt vette alapul a ritmus, a hangmagasság és a dinamika viszonyrendszerének kialakításához. Dodge a fraktálgeometria térkitöltési módszerének zenei analógiáját használta a darab időkitöltéséhez. A *Profile* szerkezete tehát úgy tölti ki az időt, ahogy a Koch-hópehely a teret.

A darab háromszólamú szerkezettel rendelkezik. Az első szólamban, amely egyben a leglassabb is, az algoritmus az $1/f$ zaj értékeit hozzárendeli a 12 fokú skála valamely fokához, ily módon egy hangmagasság-sorozatot produkál. A hangok pontos számát egy, a zeneszerző által meghatározott számú hangmagasságosztály⁴ adja meg. Az első szólam tehát legalább annyi hangot tartalmaz, mint a hangmagasságosztályok száma, de általában többet is, az $1/f$ zaj természete miatt. Ilyen módon, az alaphalmazból kiemelt, osztályok szerint kiválasztott hangmagasságok uniszónó- és oktávisméltései nagyobb eséllyel jelennek meg a folyamat során. Az 7. ábra mutatja az első szólam egy részletét, amely generálásánál az osztályok száma három volt, a folyamat pedig hét hangot adott ki.



7. ábra

Charles Dodge: *Profile* (Dodge, 1988)

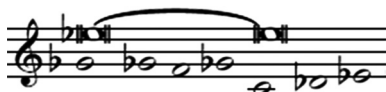
A hangmagasságosztály mint szabályzó paraméter megválaszthatósága központi helyet foglalt el a *Profile* komponálásában. A paraméter implementációja kétféleképpen történt. Az első módszer szerint a keresés abban a pillanatban lezárul, ha teljesül a megadott hangosztályok száma. A második módszer szerint a keresés akkor zárul le, amikor éppen egy új, a limiten felüli osztály lépne be.⁵ Az első esetben az utolsó hang egyben egy új osztály is, tehát kialakulhat a lezárás vagy a cél elérésének érzete. A második esetben nem biztos, hogy új osztály zárja a szólamot, ezért ott kevésbé alakulhat ki zárlatérzet.

Amint az első szólam létrejött, az algoritmus a második szólamot kezdi elkészíteni. Az első szólam minden hangjához annyi hangot rendel hozzá, amennyi

⁴ A hangmagasságosztály az azonos ABC-s nevű hangmagasságokra utal, oktávtól függetlenül. Tehát bármely C egy hangmagasságosztály tagja, de az egyvonalas A feletti C már a konkrét hangmagasság.

⁵ Ebben az esetben az utolsó hang ismétlődhet addig, amíg egy limiten felüli osztály be nem lép.

szükséges a megadott hangmagasságosztály limit eléréséhez. A 8. ábra mutat egy részletet a műveletből. Itt az előző ábra első hangja, az Esz alatt jön létre a második szólam, melyben öt osztály szerepelhet (az egyszerűség kedvéért az első szólam egy longa, a második szólam pedig egész hang formájában szerepel az ábrán). A harmadik szólam is azonos módon készült négy hangmagasságosztály engedélyezésével. A 9. ábra mutatja a három szólamot.



8. ábra

Charles Dodge: *Profile* (Dodge, 1988)



9. ábra

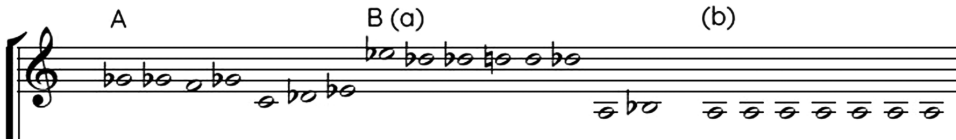
Charles Dodge: *Profile* (Dodge, 1988)

A következő lépésben a kialakított hangmagasságok sorrendben, ritmusérték nélkül kerülnek be a memóriába. A ritmusértékek kiválasztása az előző eljárás alapján. A program folytatódik, és mintha egy negyedik szólamot generálna, újra elindítja a műveletet. Azonban ahelyett, hogy beírná a hangokat a negyedik szólamba, azt figyeli, hogy az előírt osztálylimitet hány hang után érne el a harmadik szólam egyes hangjai alatt. Miután elérte a limitet, összeszámolja a kapott hangokat, ezt a számot megszorozza egy konstans értékkel,⁶ majd hozzárendeli a harmadik szólam adott hangjához. Amint elkészült a harmadik szólammal, a második szólam adott hangja alatti hangokat adja össze, és ezek összege lesz az adott hang ritmusértéke. Így jár el az első szólam hangjaival is.

A *Profile* fraktáljellege itt mutatkozik meg, lévén a szólamok úgy aránylanak egymáshoz, mint a Koch-hópehely egyes vonalai, önhasonlóságot és skálafüggelenséget mutatnak. Ha azonban az algoritmus pontosan úgy lenne létrehozva,

⁶ A *Profile* esetében ez 0,25.

ahogy fentebb le van írva, a különböző szekciók körülbelül azonos hosszúságúak lennének. Ebből a megfontolásból Dodge egy irányított devianciát is beépített az algoritmusba, amely az első szekció után minden szekció végére egyfajta kódat illeszt. Ezt a második szólam manipulálásával érte el. A kóda⁷ akkor kezdődik, amikor a második szólam elérte az előírt öt hangmagasságosztály limitet. A következő szekció nem rögtön ezután kezdődik. A második szólam addig ismételi egy, az első szólam hangjától lefelé nagydecima távolságra lévő hangot, ahány hang volt a második szólamban az előző szekció során. A 10. ábrán látható a második szólam első és második szekciója (A és B). A második szekcióban az „A” mutatja az öt osztály elérésének folyamatát, a „B” pedig a kódat. Figyeljük meg, hogy a kóda annyi hangot tartalmaz, ahány hang van a második szólam első szekciójában.



10. ábra

Charles Dodge: *Profile* (Dodge, 1988)

A PROFILE ZENEI SZERKEZETE

A szerző a darabban csak szinuszhangokat alkalmaz. Ez a megoldás kizárja a bonyolultabb hangszínek megjelenését, és ezzel segíti a pusztá szerkezet megfigyelését, hiszen egy fraktáldarabban fontos tényező lehet, hogy a fraktáljelleg minél jobban megmutatkozzon. Mindazonáltal az egyvonalas oktávban mozgó hangfelhők hangkomponensei pár alkalommal összeadódnak, így már nem lehet megkülönböztetni az egyes összetevők hangmagasságait. Az ily módon létrejövő hangszínek puhán simulnak a hangzásba, és olyannyira átlátszóak, hogy a hallgatóban felmerülhet a kétely, hogy egyáltalán léteznek-e.

Dodge alig változtatja meg az egyes hangok hangerőre alkalmazott burkológörbéjét. Ez is a struktúra minél tisztább észlelését segíti elő, hiszen ha megváltoztatjuk a burkológörbék paramétereit, azzal számos olyan módosítást végzünk, amely jelentős módon megváltoztathatja a hangzás összképét, például eltérő hangszíneket eredményezhet, átalakítja a clusterok⁸ felépítését, illetve befolyásolja az egyes szólamok közötti viszonyrendszert.

⁷ A kóda jelentése: függelék, befejező rész.

⁸ Hanghalmaz vagy hangfürt. Legtöbbször szomszédos hangok egyszerre vagy időben egymáshoz nagyon közel történő megszólaltatása.

A kompozíció elején megjelenő hangfürt eltérő, apró változtatásokkal több alkalommal visszatér, ezzel egyfajta variációs jelleget ad a formának. Ez adódhat a rózsazaj használatából, de az algoritmus felépítéséből is. Mindenesetre az önhasonlóság nagyszerűen tükröződik ebben a tulajdonságban. Az egy töről fakadó, árnyalatnyi módosításokból létrejövő variációs forma talán a legközelebbi zenei kifejeződése egy fraktálnak, mivel egy efféle felépítményből bármit is kiemelünk, annak az összetételét egyaránt meg fogjuk találni a struktúra más pontjain.

A műben jól észrevehető a tonális lebegés,⁹ a megjelenő hangzatok az ismertség, megszokottság érzetét keltik. A harmóniai folyamatot állandóan artikulálja a regiszterek közötti interakció, amely a burkológörbék azonossága ellenére jól kivehető. A vertikális együttállások összetételét minden bizonnyal a hangmagasságosztályok gondos kiválasztásával érte el a szerző. Az egyenletesen, de megszakítás nélkül belépő clustereket szinte végigkíséri egy állandó hangmagasság,¹⁰ amely jelenlétével ugyancsak hozzájárul az akkordikus viszonyrendszer kialakulásához. A darab közepén, a kitartott kétvonalas Cisz hang és az éppen zajló hangfürtök alatt megjelenik egy konstans nagy Á, amely miatt az Á tonikai szféra kiemelkedik a bizonytalan tonális lebegésből és kialakítja a legerősebb centrumérzetet. A nagy Á belépése jól időzített, éppen két részre bontja a művet, mintha a kompozíció elejétől zajló, a szerkezet bemutatására irányuló nagyítás itt megállna, majd visszafordulna. Az erősödő, majd felbukkanó centrumérzet analógiája lehet annak a folyamatnak, amely egy fraktál szemlélése, nagyítása, majd az önhasonló formák felismerése során keletkezik.

A szerzemény záróaktusa egy elhalványuló hangfürt, amelynek összetétele fokozatosan lebomlik, majd váratlanul abbamarad. Ez a gesztus jól szimbolizálja azt az érzést, amely egy fraktál tanulmányozása során keletkezik. Egy fraktál megfigyeléséből csak kilépni lehet vagy abbahagyni a vizsgálatát, hiszen határtalanul ismétlődik, és kimeríthetetlen a formai variabilitása.

KONKLÚZIÓ

Egy fraktál zenei alkalmazása nem annyira egyértelmű és könnyen hozzáférhető, mint a vizuális felhasználása. A térbeli kiterjedés időben való megjelenítése elengedhetetlen kompromisszumok megkötésére ösztönöz. Mindezzel együtt, a fraktálok számos esetben alapot adhatnak vagy segítséget nyújthatnak egy zenei megalkotásához. Ide sorolható a zenei szerkezet felépítése, a szólamok egymáshoz való viszonyának kialakítása, egy hangszín összetételének megteremtése

⁹ A hangnemiség érzetének halvány feltűnése.

¹⁰ A darab elején ez a hangmagasság kétvonalas É, majd kétvonalas Cisz, ezután újra kétvonalas É.

vagy egy, a digitális jelfeldolgozás alkalmazásával megszólaltatott hullámforma kialakítása. Az elérhető zenei szoftverek állandó fejlesztése és az új megközelítések realizálása remélhetőleg további, eddig nem ismert lehetőségeket fognak kínálni e folyton-folyvást alakuló, de önmagukhoz mindig hasonló, rendkívüli alakzatok zenében való ábrázolására.

IRODALOM

- Böhm L. (2000): *Zenei műszótár*. Budapest: Editio Musica
- Dodge, C. (1988): Profile: A Musical Fractal. *Computer Music Journal*, 12, 3, 10–14. DOI: 10.2307/3680332
- Dodge, C. – Bahn, C. R. (1986): Musical Fractals. *Byte*, 11, 6, 185–199.
- Johnson, R. S. (2003): Composing with Fractals. In: Fauvel, J. – Flood, T. – Wilson, R. (eds.): *Music and Mathematics*. New York: Oxford University Press
- Mandelbrot, B. (1982): *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, New York
- Nierhaus, G. (2009): *Algorithmic Composition*. Wien: Springer-Verlag