Magyar Tudomány 184 (2023) 11, 1394–1404
DOI: 10.1556/2065.184.2023.11.5

MAGYAR FEJLESZTÉSŰ OKTATÁST SEGÍTŐ ESZKÖZÖK ÁLTAL INSPIRÁLT DIGITÁLIS ÖTLETEK

DIGITAL IDEAS INSPIRED BY HUNGARIAN EDUCATIONAL TOOLS

Stettner Eleonóra

egyetemi docens, Magyar Agrár- és Élettudományi Egyetem Matematika és Természettudományi Alapok Intézet Matematika és Modellezés Tanszék, Kaposvári Campus, Kaposvár
stettner.eleonora@uni-mate.hu

ÖSSZEFOGLALÁS

Napjainkban a megfogható eszközök tanulmányozása, készítése mellett nagyon fontos a számítógépes lehetőségek bekapcsolása is az oktatásba. A manipulatív eszközök számítógépes modellezés segítségével történő újragondolása lehetővé teszi az eszközök bizonyos sajátosságainak dinamikus változtatását, ami a statikus anyagi eszközzel nem lehetséges. Így valósulhat meg egy téma sokoldalú, komplex megközelítése. A cikk négy magyar fejlesztésű eszközhöz (Poliuniverzum, Logifaces, Jomili-kockák, Mondrian Blocks) kapcsolódóan mutat be néhány digitálisan megvalósítható gondolatot.

ABSTRACT

Nowadays, in addition to the study and creation of tangible tools, it is very important to incorporate computer options into education. The reimagining of manipulative devices through computer modelling allows for the dynamic modification of certain features of the devices, which is not possible with static material devices. In this way, a multi-faceted and complex approach to a topic can be achieved. The article presents some digitally feasible ideas related to four tools developed in Hungary (Polyuniverse, Logifaces, Jomili Cubes, Mondrian Blocks).

Kulcsszavak: GeoGebra, Poliuniverzum, Logifaces, Jomili-kockák, Mondrian Blocks

Keywords: GeoGebra, Poly-Universe, Logifaces, Jomili Cubes, Mondrian Blocks

BEVEZETŐ

Az eszközhasználatnak a tanulás-tanítás folyamatában több évezredes hagyománya van. Már az ókori kínaiaknál, sumeroknál, egyiptomiaknál vagy görögöknél is összekapcsolódik a matematikai absztrakció és a különböző tárgyakkal (botokkal, kavicsokkal) történő manipuláció.

Az eszközhasználat az oktatás javítására sok lehetőséget rejt magában, de nem elég az eszközöket csak a gyerekek kezébe adni, szükséges megfelelő módszerekkel, jól átgondolt módon a tanulási folyamatba beépíteni azokat (Swan–Marshall, 2010).

Varga Tamás komplex matematikatanítási kísérletének egyik fontos tanuláselméleti vívmánya az volt, hogy a fejlődéslélektani kutatások eredményeinek megfelelően megvalósította a személyes tapasztalatszerzésből induló ismeretszerzést. Minden kisgyerek számára biztosítani kívánta az elegendően széles körű személyes tapasztalás lehetőségét – megfelelő tárgyi, manuális és gondolati tevékenységeket szervezve számukra –, hogy tanítói irányítással, segítséggel saját tapasztalataik általánosításából és absztrahálásából jussanak el az ismeretekig (Klein, 1980). Ez a tanulás eszközigényes, lényegesen több és nehezebb szervezéssel, más jellegű tanításirányítással, más ellenőrzési módokkal jár, mint a közlő-befogadó út.

Fontos az is, hogy a gyakorlati és a digitális modellezést összekapcsoljuk a tanulási folyamatban, hogy ajánlásokat tegyünk a tanároknak arra vonatkozóan, hogy a STEAM-pedagógia hogyan támogathatja a tanítást az osztályteremben és azon kívül. A technológia integrálása a STEAM-projektekbe szinte elengedhetetlen, mivel megfigyelhető, hogy a technológia átalakítja a tanulási környezetet, és a 21. századi tanulás részévé válik (Prodromou–Lavicza, 2017).

ANALÓG VAGY DIGITÁLIS?

Ez a kérdés mindnyájunkban felvetődik, akik oktatással foglalkozunk. Ezt jelképezi a Logifaces módszertani könyv címe is: *Analóg játék digitális elméknek* (Analogue Game for Digital Minds) (URL1).

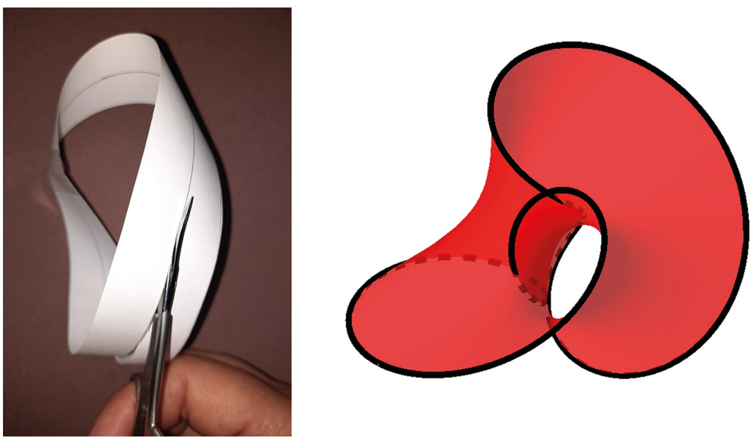
Azt gondolom, hogy mindkettőre szükség van, a legfontosabb a megfelelő arány megtalálása.

Az oktatás jelenleg számos új kihívással néz szembe. Az internet világa szinte minden tudást biztosít a mai gyerekek számára; a kapcsolatok korlátlan hálózatában élnek. Ez a folyamat alapvetően változtatja meg a tanár és az oktatás szerepét. Az egész nemzetközi oktatási rendszer megújulásra szorul, hogy megfeleljen a diákok és a tanárok igényeinek. A tanárokat motiválják, hogy olyan új módszereket keressenek és fedezzenek fel, amelyek segítenek kapcsolatot találni a gyerekekkel, és hogy megkönnyítsék a velük való együttműködést. Ezen új módszerek lehetnek, többek között, ha megfelelően megválasztott eszközöket adunk a gyerekek kezébe, kiegészítve az eszközök digitális változatával, továbbfejlesztésével.

Egyes feladatoknál hasznosabb a manipulatív eszköz, hogy kézbe fogva, megforgatva, mintákat rakjunk ki, építményeket hozzunk létre. A látás, a tapintás mélyebb tapasztalati alapú tanulást eredményez. Különösen fontos ez a különböző fogyatékossággal élők, például autista, látás- vagy hallássérült, illetve beszédhibás gyermekek számára. Más esetekben a digitális modellezés segítségével olyan változtatásait hozhatjuk létre a modellnek, amely fizikailag nagyon körülményes, vagy esetleg nem is lehetséges.

Nézzük például a Möbius-szalagot. Fontos tapasztalat egy papírcsíkból összeragasztott Möbius-szalagot megfesteni, és látni a felület egyoldalúságát. Középvonalán, majd harmadoló vonalán elvágni, és csodálkozni a nem várt eredmény létrejöttén. De ha a szalagot létrehozó téglalap arányait megváltoztatjuk, egy bizonyos arányon túl már gyűrődés nélkül nem tudjuk elkészíteni a szalagot, főként, amikor már önátmetsző lesz, de ezt egy számítógépes modellel egyszerűen megvalósíthatjuk (URL2).

A digitalizálással, különböző szoftverek alkalmazásával sohasem a játékok változatlan digitális modelljét szerettem volna létrehozni, hanem arra voltam kíváncsi, hogy a számítógépes modellezés milyen új lehetőségeket rejt magában. Hogy tudjuk dinamikussá, megváltoztathatóvá tenni a modell egyes tulajdonságait? A tulajdonságok változtatása milyen új kérdéseket vet fel?



1. ábra. Möbius-szalag papírból és a GeoGebrában (a szerző fotója és rajza)

A FELHASZNÁLT SZOFTVEREK RÖVID ISMERTETÉSE

1. A GeoGebra

Digitális modellező eszközként leggyakrabban a GeoGebrát (URL3) használtam, mivel ez az egyik legszélesebb körben használt, dinamikus matematikai szoftver a világon, és a GeoGebra 3D modellező eszközei lehetővé teszik, hogy könnyen létrehozzuk a fizikai struktúrák modelljeit.

A GeoGebra Markus Hohenwarter diplomamunkája volt a Salzburgi Egyetemen 2002-ben, középiskolai oktatási segédletként készítette. A GeoGebrát az elmúlt évek során számos nemzetközi díjjal jutalmazták. A dinamikus matematikai szoftverek vezető szolgáltatójává vált, amely világszerte támogatja a természettudományos, technológiai, mérnöki és matematikai, művészeti (STEAM) oktatást, valamint a tanítás és tanulás innovációit.

A GeoGebrához kapcsolódik egy több millió felhasználóból álló közösség, amelynek tagjai szinte minden országban megtalálhatók.

A felhasználó két dimenzióban gyakorlatilag egy virtuális szerkesztőkészletet kap a kezébe. A papíron végzett szerkesztésektől eltérően itt a kiinduló objektumok (pontok, egyenesek stb.) szabadon mozgathatók, úgy hogy a tőlük függő objektumok velük együtt mozognak. Másrészt, egy számítógépes algebrai rendszer, amelyben az objektumok algebrai úton is megadhatók (pontok koordinátáikkal, egyenesek egyenleteikkel, függvények képletükkel stb.). A GeoGebra fontos tulajdonsága, hogy egy kifejezés az algebra-ablakban megfelel egy objektumnak a geometria-ablakban, és viszont. Függetlenül attól, hogy az objektumot milyen módon vettük fel (a geometria-ablakban szerkesztéssel vagy az algebra-ablakban paramétereinek megadásával) mindkét ablakban módosítható, és a változás a másik ablakban is látható (Papp-Varga, 2009). A GeoGebra 3D-ben már három ablak objektumai vannak „összekötve egymással" a 3D objektum, egy síkmetszete 2D-ben és az algebrai leírás.

A GeoGebra applikációk *online* és *offline* is használhatók. Ingyenesen letölthetők iOS-re, Androidra, Windowsra, Macre, Chromebookra és Linuxra. A GeoGebra Classroom nevű együttműködési platformon keresztül a tanárok a diákok előrehaladását valós időben követhetik nyomon.

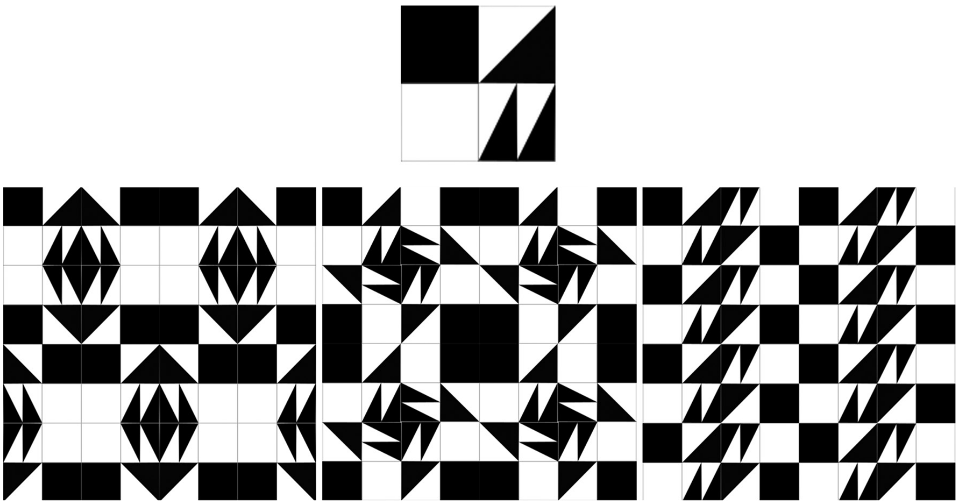
2. Az Inkscape program

Az Inkscape (URL4) ingyenesen beszerezhető, professzionális szemléletű vektorgrafikai program, amely alkalmas iskolai oktatásban való felhasználásra, kisebb példányszámú grafikai tervek kivitelezésére vagy webgrafikák készítésére. Magyar nyelven is elérhető, sőt a program megismerését segíti, hogy 2014-ben az FSF.hu Alapítvány létrehozta az inkscape.hu weboldalt, és kiadta az *Inkscape – vektorgrafika mindenkinek* című szakkönyvet. Ez utóbbi több mint 400 oldalon, 76 önálló tanulásra alkalmas feladattal igyekszik bevezetni az olvasót a vektorgrafikus tervezés gyakorlatába, emellett megismertetni a grafikai tervezés folyamatával is.

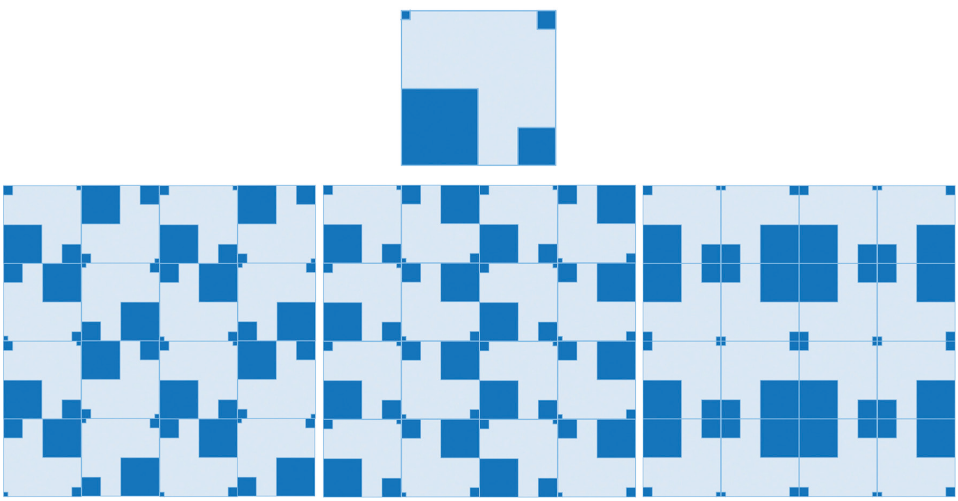
Számomra az Inkscape program azért különösen érdekes, mert a szokásos geometriai transzformációkon (tükrözések, eltolás, forgatás, nagyítás, kicsinyítés) kívül ismeri a sík tizenhét szimmetriacsoportját (angol nyelvterületen tapéta csoportok – *wallpaper groups*). Ezt a tizenhét szimmetriacsoportot használta

M. C. Escher is a síkot hézag- és átfedésmentesen lefedő állatokból, varázslatos lényekből álló mintáinak készítéséhez.

Ez azt jelenti, hogy ha egy mintának egy kis alapelemét megszerkesztjük Inkscape-ben, egy mozdulattal tetszőleges méretben hozhatunk létre bármely szimmetriacsoportnak megfelelő mintát.



2. ábra. A Jomili-kockákból kirakott alapminta és néhány szimmetriacsoportnak megfelelő variációja (a szerző saját szerkesztése)



3. ábra. A Poliuniverzum négyzet alapeleme és néhány szimmetriacsoportnak megfelelő variációja a tradicionális portugál csempék színeivel (a szerző saját szerkesztése)

3. A GoogleDraw program

A GoogleDraw a Google által fejlesztett ingyenes, webes alkalmazás. Lehetővé teszi képek importálását a számítógépről vagy a világhálóról. A beillesztett vagy megrajzolt alakzatokat, képeket meg lehet sokszorozni, forgatni, tükrözni, kicsinyíteni, nagyítani. Így a kézzel fogható eszközökből kiindulva érdekes alkotások születhetnek. A spanyol iskolások a Poliuniverzum-elemekből kiindulva egy kiállításnyi anyagot készítettek a PUSE ’Poly-Universe in School Educatation’ Erasmus+ projekt keretében.

NÉHÁNY, MANIPULATÍV ESZKÖZÖK ÁLTAL INSPIRÁLT ÖTLET SZÁMÍTÓGÉPES MEGVALÓSÍTÁSA

1. A Poliuniverzum-eszköz további lehetőségei a GeoGebrában

Oldalszámok változtatása 2D-ben

Az egyik kérdés, ami először felmerülhet, az hogy mi lenne, ha az oldalszámokat elkezdenénk növelni, ötszög, hatszög, … n-szög esetében kezdenénk rajzolni $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{2^k}$ arányú csúcsalakzatokat? Első pillantásra meglepő eredményt kapunk. Hatszög esetében a két legnagyobb csúcsalakzat egy-egy oldala illeszkedik egymásra. Nagyobb oldalszámnál pedig ez a két sokszög egymásba is nyúlik. Azt, hogy hatszög esetében miért illeszkedik a két legnagyobb csúcsalakzat 1-1 oldala, elemi geometriai bizonyítással be lehet látni.

De további kérdések is felmerülhetnek. Ki tudnánk számítani a metszetek területét? Ha változtatnánk az arányt, milyen arány esetén nincs közös része a két legnagyobb csúcsalakzatnak? Erre készült egy GeoGebra applikáció is – itt az oldalszámokon kívül az arány is változtatható –, ezzel lehet kísérletezni, majd próbálkozni a bizonyítással. Mi lenne, ha más sorrendben helyeznénk el a csúcsalakzatokat, vagyis az $\frac{1}{2}$ arány után nem az $\frac{1}{4}$, hanem mondjuk az $\frac{1}{8}$ következne? Akkor is fennállna a fenti probléma?

Arányok változtatása

A Poliuniverzum feltalálója is kísérletezett az arányok változtatásával, sőt nemcsak befelé, hanem az alapformából kifelé, azaz negatív aránnyal is készültek alkotásai. A *4. ábra* első sorában láthatjuk a háromszögforma hasonlósági, „b” arányának változásait négy lényegesen különböző esetben: $-2 \le b < 0$, $0 < b < \phi$, $\phi < b < 1$, $1 < b \le 2$, ahol $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, az aranymetszés aránya. Az aranymetszés aránya először akkor merült fel, amikor a Poliuniverzum-négyzet háromdimenziós kiterjesztésére gondoltunk. Egy kocka mind a nyolc csúcsába egy-egy kisebb kocka került rendre $\frac{1}{2}$ részére kicsinyítve. A 6. csúcstól kezdve már szinte láthatatlanok voltak a kockák. Felmerült az a kérdés, hogy meddig lehet növelni az arányt, hogy a legnagyobb két csúcsalakzat még ne nyúljon egymásba?

Ekkor az $a = \lambda \times a + \lambda^2 \times a$ egyenletet kell megoldanunk λ-ra, ahol λ a hasonlóság aránya, a pedig az alap kocka éle. A másodfokú egyenlet pozitív megoldása az aranymetszés aránya lesz.

Számtalan kitekintést, kapcsolódási pontot adhat a fenti szerkesztések elkészítése. Elsősorban matematikai kapcsolatok adódnak. Beszélhetünk a középpontos hasonlóság tulajdonságairól, különböző arányok esetén, hasonló sokszögek, síkidomok területéről, de az aranymetszés a matematika mellett a művészettel is összefügg. Az aranymetszés aránya számtalan képen, épületen, zeneműben megjelenik, de hétköznapi tárgyainkon (például a bankkártya is arany téglalap), ismert logókon is feltűnik.

Poliuniverzum 3D-ben

A háromszög alapelem 3D kiterjesztésére természetesen adódik a tetraéder, a négyzet elemre pedig a kocka. A centrális nyújtás a GeoGebrában térbeli alakzatokra is érvényes, így a szerkesztés könnyen, pár lépésben elvégezhető. A *4. ábrán* látható tetraédernél az arány maradt a hagyományos $\frac{1}{2}$, de a kockánál a fent említett okok miatt az aranymetszés arányát használtuk. Természetesen az alapelem is kiszínezhető, de az ábrán a jobb láthatóság miatt az alapelem élvázas szerkezetű lett.

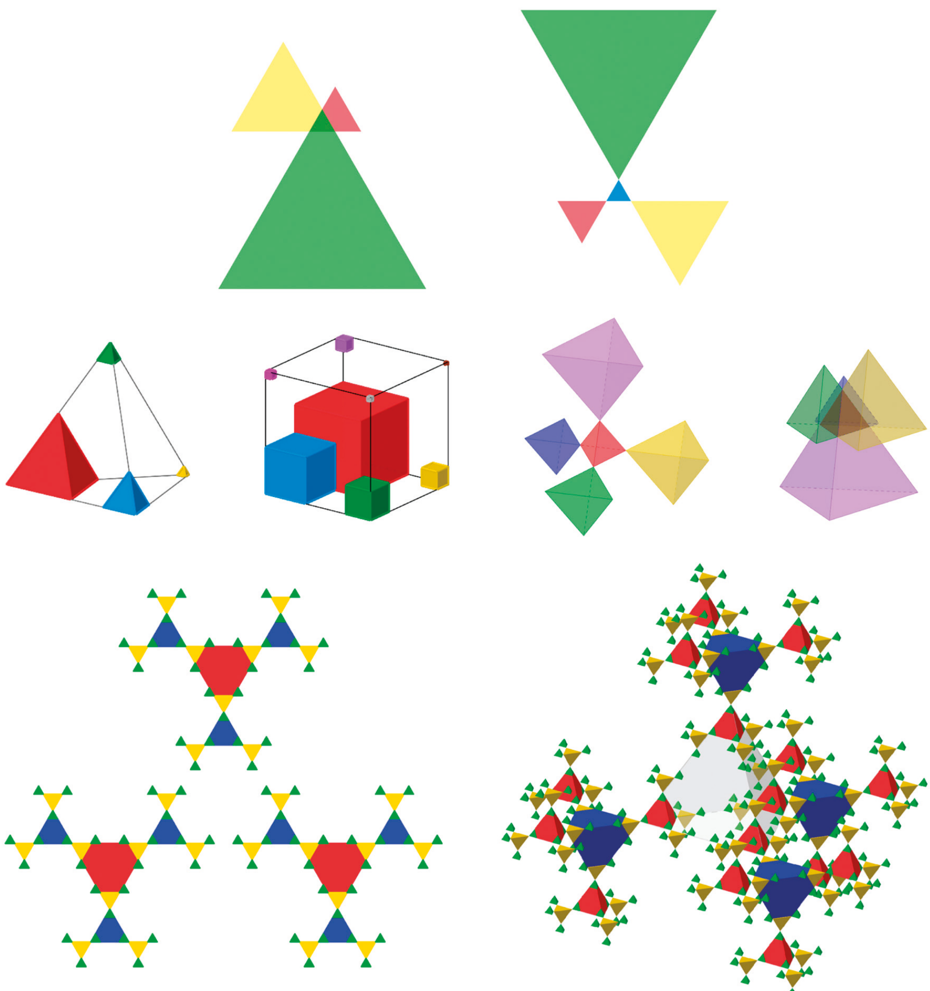
A csúszkán változtatható arányokkal a két poliéder alapú esetben is kísérletezhetünk. A *4. ábra* második sorának jobb oldalán látható egy negatív, –1-nél kisebb és egy pozitív, 1-nél nagyobb aránnyal a tetraéder.

Poliuniverzum és a fraktálok

A GeoGebrában talán a fraktálok rajzolása, színezése az, ahol leginkább kiélhetjük alkotó hajlamainkat. Lehetnek ezek a fraktálok színesek – a Poliuniverzumnak megfelelő vagy attól eltérő színezésűek, egyszínűek, különböző árnyalatú részekkel, készülhetnek síkban háromszögből, négyzetből kiindulva, vagy térben tetraéderre, kockára alapozva. A térbeli fraktálok vetületei is nagyon érdekesek lehetnek.

A fraktálok rajzolása, tanulmányozása során minden egyes lépésben kiszámolhatjuk az összalakzat kerületét, területét. Megvizsgálhatjuk, hogy mi lesz a kerület, terület határértéke, ha a lépések száma a végtelenhez tart. Véges területen lehet végtelen hosszú törtvonal? Lehetőségünk van a dimenziók fogalmának körüljárására, miért törtdimenziósak a fraktálok? Egy színes térbeli és síkbeli fraktál a *4. ábra* 3. sorában található.

A Poliuniverzum elemeire építve természetesen még sok, további ötletet is felvethetünk, továbbgondolhatunk. Például a Poliuniverzum térbeli kiterjesztései a kristályrácsok felé is adhatnak továbblépési lehetőséget. Érdekes kérdés az is, hogy hogyan nézne ki a köralakzat a térben? Meg tudjuk-e szerkeszteni GeoGebrában? És a kérdések sora végtelen, egy-egy újabb kérdés egyre több további gondolatot ébreszt. A fent említett applikációk az alábbi linken találhatók meg: URL5.



4. ábra. A Poliuniverzum eszköz továbbgondolása a GeoGebrában
(a szerző saját szerkesztése)

2. A Mondrian Blocks és a GeoGebra

A Mondrian Blocksból kiindulva is nagyon sok továbbgondolásra érdemes ötletünk támadhat. Ezek közül egyet mutatok be.

A Mondrian Blocksszal való játék során észrevehetjük, hogy az elemek között vannak azonos kerületű, különböző területű téglalapok, illetve négyzetek. De fordítva is találunk példát azonos területű, különböző kerületű játékelemekre. Az előbbire több példát is találunk, egyik ilyen az 1 × 5-ös, 2 × 4-es és 3 × 3-as elem, mindegyik kerülete 12 hosszúságegység, területük azonban rendre 5, 8, 9 területegység. Felvetődik a kérdés, hogy azonos kerületű téglalapok közül melyiknek a területe maximális? Illetve fordítva, hogy azonos területű téglalapok közül melyiknek a kerülete minimális?

Az alábbi linken megnyitható GeoGebra applikáció az azonos területű téglalapok közül keresi a minimális kerületűt: URL6.

A GeoGebra nagyszerűségét mutatja, hogy egy csúszkán változtatva a téglalap oldalait – megtartva az állandó területet – három ablakban egyszerre követhetjük a kerület változását. Az algebra-ablakban a számolások láthatók, az egyik rajzlapon a változó oldalú téglalap, a feladat geometriája, a másik rajzlapon pedig a kerületfüggvény.

Hasonlóan az azonos kerület, különböző terület is modellezhető GeoGebrában a téglalapok körében: URL7.

A fenti kérdések kicsit színesebben gyerekek számára is megfogalmazhatók: 36 m^2 területű kertet szeretnénk bekeríteni. Milyen hosszú kerítést vásároljunk, ha nagyon takarékosak vagyunk? Van 12 m hosszú kerítésem, milyen alakú kertet érdemes bekerítenem, hogy a legtöbb zöldséget tudjam elvetni?

Természetesen ezek a kérdések még tovább általánosíthatók. Minél több oldalú egy sokszög annál nagyobb a területe azonos kerület mellett. Egy nyolcszögletű ház építéséhez kevesebb falazóanyagot kell felhasználni ugyanazon alapterület esetén, mint egy téglalap alakúhoz. (Gondolom, itt építészeti szempontból felmerülnek más problémák, de ezt most nem vizsgáljuk.) A legnagyobb területet a kör adja azonos kerület mellett, lásd izoperimetrikus problémák.

3. A Logifaces és a GeoGebra

A legkézenfekvőbb GeoGebra applikáció, ami a Logifaces módszertani könyvben is megjelenik az, hogyan ábrázoljuk az elemeket GeoGebra 3D-ben. Mivel minden elem azonos alapterületű szabályos háromszög, és csak az alaplapra merőleges élek különböznek az egyes elemeknél, az ábrázolás dinamikusan egyetlen GeoGebra fájlban megvalósítható. Csúszkán beállítjuk a három változtatható élet, amelyek 1, 2, 3 egység hosszúak lehetnek.

Egy kevésbé kézenfekvő, fizikához kapcsolódó gondolat: Helyezzünk egymás mellé két Logifaces-elemet illeszkedő oldaléllel. Tegyünk egy kis golyót az illeszkedő élek közelébe. Mely elempárokból tudunk létrehozni így a golyók számára stabil, labilis és közömbös egyensúlyi helyzetet? Majd egy Logifaces-elemre helyezzünk egy másikat oldallapjára állítva. Érdemes kísérletezni a különböző elemekkel. Mikor borul fel a lejtős oldallapra helyezett elem? Amíg a test súlypontjából húzott egyenes metszi az alátámasztási felületet, a test nem borul fel. Ezt láthatjuk az alábbi dinamikus GeoGebra fájlban a lejtő szögét változtatva: URL8.

KÖVETKEZTETÉSEK

Véleményem szerint mind a négy felsorolt eszköz és az említett szoftverek használata elősegíti és támogatja a kreativitást a tanulásban. A manipulatív és digitális eszközök használata szórakoztató és örömteli, a geometriai művészet egyfajta kreativitása arra ösztönözheti azokat a tanárokat, akik az oktatásban haszontalannak találják a játékokat, hogy megváltoztassák hiedelmeiket. Más tanárok a manipulatív és digitális eszközöket évek óta használják a tanulói aktivitás növelésére és a tanulási eredmények javítására az osztályteremben vagy tanórán kívüli foglalkozásokon, azonban még mindig problémákkal szembesülnek az eszközök kiválasztásával és alkalmazásával. Projektjeinkben ehhez is szeretnénk útmutatást, segítséget adni.

A játékok és eszközök használata egy lehetséges módja a motiváció, az élvezet fokozásának, ami pozitív hatással van a tanulásra, segítségükkel összekapcsolhatjuk a tanulás analóg és digitális világát.

IRODALOM

Colucci-Gray, Laura – Burnard, Pam – Coke, Carolyn et al. (2017): *Reviewing the Potential and Challenges of Developing Steam Education through Creative Pedagogies for 21st Learning: How Can School Curricula Be Broadened Towards a More Responsive, Dynamic, and Inclusive Form of Education?* London: British Educational Research Association, https://www.bera.ac.uk/wp-content/uploads/2017/11/100-160-BERA-Research-Commission-Report-STEAM.pdf

Fenyvesi Kristóf (2016): Bridges: A World Community for Mathematical Art. *Mathematical Intelligencer,* 28, 35–45. DOI: 10.1007/s00283-016-9630-9, https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/50042/fenyvesibridges.pdf?sequence=1

Klein Sándor (1980): *A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata.* Budapest: Akadémiai Kiadó, ISBN 963051737X

Lavicza Zsolt – Fenyvesi Kristóf – Lieban, Diego et al. (2018): Mathematics Learning through Arts, Technology and Robotics: Multi- and Transdisciplinary STEAM Approaches. In: *EARCOME*

8: 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education. Volume 2. Taipei: National Taiwan Normal University, 28–29. https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/63173/earcome%208%20paper.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Papp-Varga Zsuzsa (2009): Interaktív matematika mindenkinek GeoGebra módra. In: Berke József: *Multimédia az oktatásban, 1995–2010.* Konferenciakötet. Paper: 18. Budapest: Neumann János Számítógép-tudományi Társaság, 2011, ISBN 9786155036040, https://www.mmo.njszt.hu/Kiadvanyok/2009/cikkek/Papp-Varga_Zs_GeoGebra.pdf

Prodromou, Theodosia – Lavicza Zsolt (2017): Integrating Technology into Mathematics Education in an Entire Educational System – Reaching a Critical Mass of Teachers and Schools. *International Journal of Technology in Mathematics Education,* 24, 3, 129–135. DOI: 10.1564/tme_v24.3.04, https://tinyurl.com/9upr8kwz

Swan, Paul – Marshall, Linda (2010): Revisiting Mathematics Manipulative Materials. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 15, 2, 13–19. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ891801.pdf

URL1: https://experienceworkshop. org/fi/the-logifaces-book-is-out-analogue-game-for-digital-minds/

URL2: https://www.geogebra.org/m/sNBUUBE1

URL3: https://www.geogebra.org/

URL4: https://inkscape.org/

URL5: https://www.geogebra.org/m/ms8nzfym

URL6: https://www.geogebra.org/classic/jxqyxbhx

URL7: https://www.geogebra.org/classic/hwpmprem

URL8: https://www.geogebra.org/classic/q3dpcphb