

# SPECIÁLIS SÍKGÖRBÉK RAJZOLÁSÁHOZ FEJLESZTETT OKTATÁSI ROBOTOK

## DEVELOPMENT OF EDUCATIONAL ROBOTS FOR DRAWING SPECIAL PLANE CURVES

Szilágyi Szilvia<sup>1</sup>, Körei Attila<sup>2</sup>

<sup>1</sup>egyetemi docens, Miskolci Egyetem Matematikai Intézet Analízis Tanszék, Miskolc  
szilvia.szilagyi@uni-miskolc.hu

<sup>2</sup>egyetemi docens, Miskolci Egyetem Matematikai Intézet Alkalmazott Matematikai Tanszék, Miskolc  
attila.korei@uni-miskolc.hu

### ÖSSZEFOGLALÁS

A különböző típusú síkgörbék paraméteres egyenletének levezetése általában összetett, több-lépéses eljárás eredménye, amelyhez a vizualizáció elengedhetetlen. Ezek a folyamatok csupán statikus eszközökkel általában nehezen magyarázhatók. A manapság közkedvelt mandalarajzok és -színezők, illetve a szintén nagy népszerűségnek örvendő oktatási robotika kombinálásával a STEAM-alapú oktatás előnyeire alapozva hoztuk létre azokat a rajzoló szerkezeteket, amelyek kreatív tevékenységhez kapcsolják a paraméteres megadású görbék megismerését, megértését és tanulmányozását. A LEGO Education SPIKE Prime oktatási robotkészletek lehetőségeit kiaknázva két saját konstrukciójú rajzoló robotot ismertetünk, amelyek képesek speciális síkgörbék megjelenítésére. Ezek a görbék körök egymáson való csúszásmentes gördítésével keletkeznek, ennek modellezésére mindkét robot esetén fogaskerekeket használtunk. A generálopont helyzetének megváltoztatásával és a beépített fogaskerekek variálásával változatos formavilágú geometriai alakzatokat hozhatunk létre, így kapcsolva össze a mérnöki és matematikai ismereteket a művészettel.

### ABSTRACT

The derivation of parametric equations for different plane curves usually results from a complex, multi-step process for which visualization is essential. These processes are generally difficult to explain by static means alone. By combining the currently-popular mandala drawings and colouring books with the equally popular educational robotics, we have taken advantage of STEAM-based education to create drawing devices that link the learning, understanding, and study of parametric curves to creative activities. Through exploiting the potential of LEGO Education SPIKE Prime educational robot kits, we present two custom-built drawing robots capable of displaying unique plane curves. These curves are generated by rolling circles on each other without slipping, and gears are used to model this process for both robots. Different geometric shapes can be created by changing the position of the generating point and varying the built-in gears, thus we can combine engineering and mathematics with art.

**Kulcsszavak:** síkgörbék rajzolása, oktatási robotika, STEAM-alapú oktatás

**Keywords:** drawing plane curves, educational robotics, STEAM-based education

## BEVEZETÉS

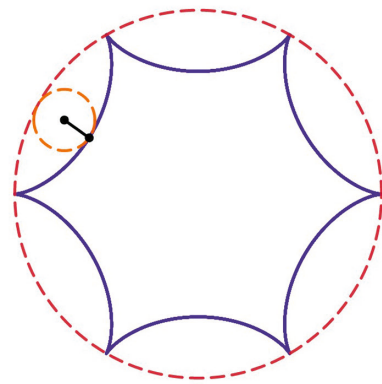
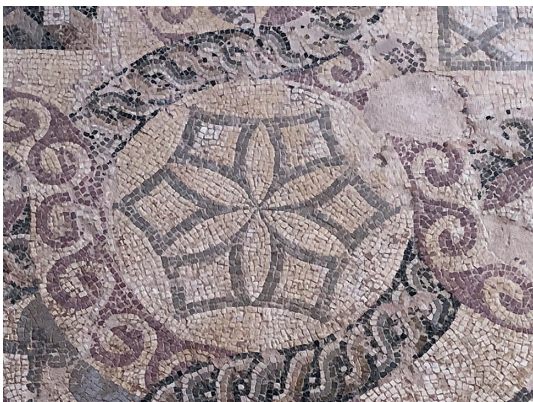
Napjainkban a játékalapú tanulás egyre nagyobb teret nyer a felsőoktatásban is, köszönhetően annak, hogy a Z generációs diákok számára a hagyományos oktatási módszerekhez és eszközökhöz képest a játékok ismerős, biztonságos környezetet nyújtanak, amelyek a tanulást nem stresszessé, hanem nyugodt környezetben megvalósuló aktív folyamattá teszik (Ding et al., 2017). Úgy a magyar, mint a nemzetközi felsőoktatásban a műszaki és informatikai alapszakokon tanulók a tapasztalatok szerint szívesen vesznek részt a játékos elemekkel tarkított kurzusokon (Tuparova et al., 2018; Reddy Narasareddygarri et al., 2018; Takács, 2023), illetve a játékalapú tanulást megvalósító projekteken (Körei–Szilágyi, 2022a). A játékalapú oktatás a legtöbb esetben eszközigenyes. A kereskedelmi forgalomban kapható játékok közül változtatás nélkül viszonylag kevés applikálható közvetlenül a játékalapú tanulás megvalósítására a műszaki és informatikai felsőoktatásban, de például a LEGO Technic-készletek felhasználására több jó gyakorlat ismert (Spitzer–Ebner, 2017; Körei–Szilágyi, 2022a). Az elmúlt évtized fejlesztéseinek köszönhetően számos különböző robotikai taneszköz is rendelkezésre áll, amelyek közös célja az innováció és a tanulók motivációjának elősegítése a tanulási folyamat során. Tekintettel arra, hogy a robotok egyre inkább elterjednek világunkban, fontos és kézenfekvő, hogy integráljuk őket az oktatásba (Mubin et al., 2013). Az oktatási robotok egyértelműen új lehetőségeket nyitottak meg a tanítás és a tanulás terén. Nyilvánvaló, hogy a legtöbb oktatási alkalmazásuk a robotikával, informatikával kapcsolatos tantárgyakra összpontosít, mint például a robotprogramozás, a robotépítés és a mesterséges intelligencia (Mitnik et al., 2009), azonban a STEAM-pedagógia sikerességét nem csak ezeken a területeken lehet kamatoztatni. Tény, hogy a STEAM-alapú oktatáshoz fejlesztett LEGO Education-robotkészletek célcsoportját elsősorban nem a felsőoktatásban tanulók jelentik, ugyanakkor ezeknek a készleteknek a változatossága, variabilitása lehetővé tette, hogy olyan designalapú holisztikus projekteket dolgozzunk ki, amelyekben a mérnöki ismeretek a matematikával és a művészetrel is szinergiába lépnek. Az oktatási robotok felhasználásának lehetőségeit a klasszikus matematikai analízis keretein belül kerestük, és a síkgörbék témakörében találtuk meg a cikloidális görbék ábrázolása, paraméteres egyenletrendszerének levezetése és tulajdonságainak vizsgálata kapcsán. Cikkünkben a STEAM-alapú projektekhöz használt saját fejlesztésű oktatási robotjainkat mutatjuk be.

## GEOMETRIAI MINTÁZATOK ÉS CIKLOIDÁLIS GÖRBÉK

A kétdimenziós sík görbéinek jelentős családját alkotják azok az alakzatok, amelyek úgy keletkeznek, hogy egy rögzített görbén csúszás nélkül mozgatunk egy másik görbét, és a mozgatott görbe valamely pontjának vagy a görbéhez mereven rögzített pontnak a pályáját vizsgáljuk. Ezeket a görbéket összefoglaló néven *rulettáknak* nevezzük. Ha a gördülő görbe kör, akkor *cikloidális görbe* keletkezik. A fix görbét alapgörbének, a csúszásmentesen gördülőt pedig generálogörbének – kör esetén generálokörnek – mondjuk. Különösen érdekesek azok a görbék, ahol mindkét görbe kör. Ekkor a körök egymáshoz viszonyított helyzetétől függően két nagy görbecsaládot különböztetünk meg. *Hipocikloisok* keletkeznek akkor, ha a rögzített kör belsejében gördítjük a mozgó kört, míg *epicikloisok* akkor jönnek létre, ha a rögzített körön kívül helyezkedik el a generálokör (Lawrence, 1972).

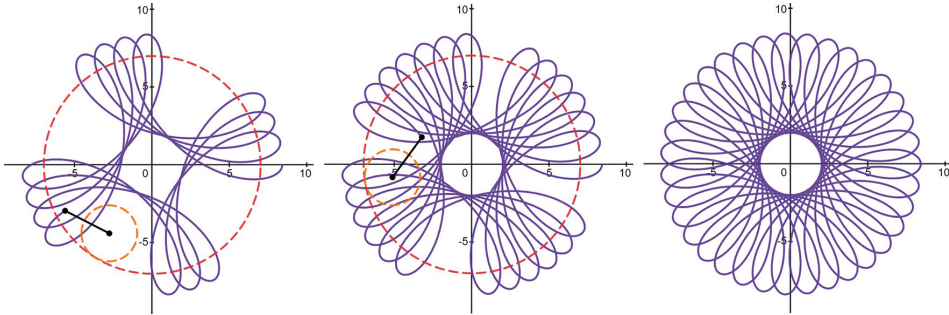
Mind a művészet, mind a matematika magába foglalja a rajzolást, ahol a vonalak, formák, mintázatok, arányok és a szimmetria jelentik azokat a kapcsolódási pontokat, amelyekkel e két terület összefonódik. A geometriai minták felhasználása a művészetben hosszú múltra tekint vissza. Bármilyen meglepő, már az ókori görögök által használt bonyolult geometriai mintázatokban is felfedezhetők a *cikloidális görbék* bizonyos típusai. Az 1. ábrán látható, hatsúcsú *hipociklois* esetén a fix kört és a generálokört szaggatott vonal jelöli. Ez a görbe akkor keletkezik, amikor a belső kör csúszásmentesen gördül a külső körön és a generálpont a gördülő kör egy kerületi pontja. Ha a belső kör egyszer végiggördül a külső körön, akkor záródik a görbe.

Sok olyan *cikloidális görbe* van, ahol nem elegendő a gördülő kör egyetlen körbefordulása a görbe létrejöttéhez. Erre látunk egy illusztratív példát a 2. ábrán,



1. ábra. Geometriai mintázatú mozaikpadló részlete hatsúcsú hipocikloissal (Ciprus, Páfosz, Kato-Páfosz; Kr. u. késő 2. vagy korai 3. század) (a szerzők saját készítésű képe)

ahol a görbe záródásához kilenc teljes körbefordulásra van szükség. Egy *hipo-* vagy *epiciklois* csak akkor lesz zárt görbe, ha alapköre és generálóköre sugarának aránya racionális szám. A területek aránya határozza meg, hogy hány körbefordulás után záródik a *hipo-* vagy *epiciklois* pályája.



**2. ábra.** Hipociklois, ahol a fix kör sugara 7, a mozgó kör sugara 1,8.

A generálopont távolsága a mozgó kör középpontjától 3,2. Szaggatott vonal jelöli a fix kört és a generálókört is (a szerzők saját szerkesztése)

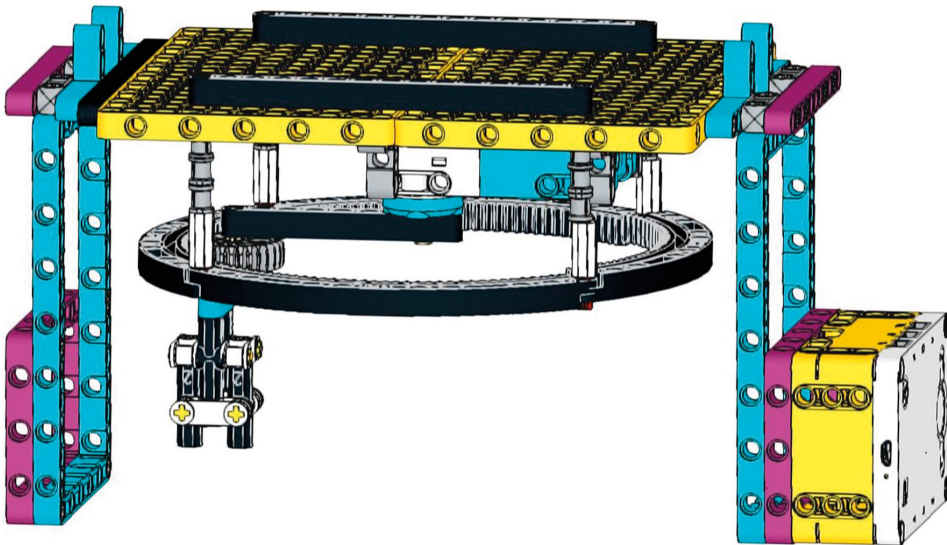
Figyelemre méltó tény és matematikatörténeti szempontból jelentős mérföldkő, hogy Albrecht Dürer, a nagy reneszánsz német művész egy 1525-ben megjelent geometriai témájú kéziratában részletesen foglalkozott a *cikloidális görbékkel*, és a műveiben látható díszítő alakzatokban fel is használta ezeket a változatos megjelenésű, attraktív síkgörbéket (Simoson, 2008). Gyakorlati felhasználhatóság szempontjából először a dán Ole Rømer tanulmányozta a *cikloidális görbék*et 1674-ben, amikor a fogaskerék fogazatának optimális formáját kereste (Yates, 1974). A 17–18. század híres matematikusai, például Christiaan Huygens, Gottfried Wilhelm Leibniz, Guillaume de L'Hospital, Jakob Bernoulli, Leonhard Euler, Edmund Halley és Isaac Newton egyaránt sokat foglalkoztak a *cikloidális görbékkel*, mert fizikai vonatkozásaik fontosak, tulajdonságaik érdekesek (Colerus, 1938; Whitman, 1943).

## CIKLOIDÁLIS GÖRBÉK RAJZOLÁSA LEGO-ROBOTOKKAL – SPIKOGRÁF 1.0 ÉS SPIKOGRÁF 2.0

Évtizedek óta léteznek olyan rajzoló eszközök, amelyekkel különböző *hipo-* és *epicikloisok* készíthetők. Például a harmonográf egy archaikus, tudományos eszköz, amely egy ingarendszer segítségével geometriai alakzatokat hoz létre a matematikai harmónia szemléltetésére. A harmonográfokról Robert J. Whitaker egy nagyon érdekes, kétrészes történeti áttekintést írt, amelynek második része a körmozgásokon alapuló rajzgépeket ismerteti (Whitaker, 2001). Ez az írás és Whitaker 2010-es cikke egyaránt foglalkozik a Spirograph játékkal,

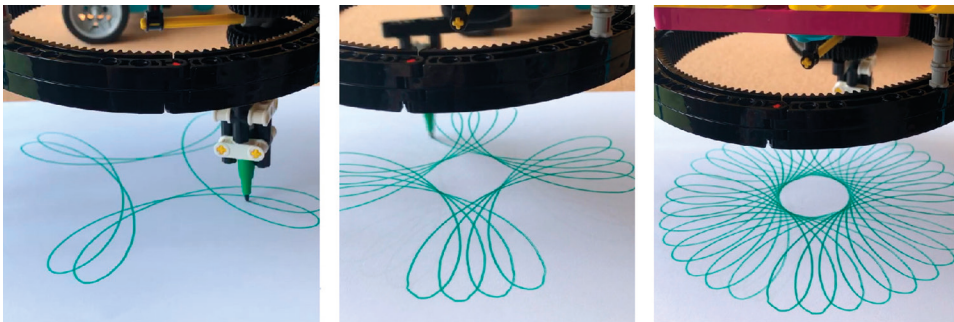
amely lényegét tekintve egy modern harmonográfnak tekinthető. A Spirographot egy brit mérnök, Denys Fisher találta fel 1965-ben. A készlet különböző méretű fogaskerekeket tartalmaz, amelyek a csúszásmentes gördítést biztosítják a rajzoláskor. A Spirograph elvét többen próbálták átültetni a robotika világába, azonban a legtöbb esetben az elérendő cél csupán az ismétlődő, szimmetrikus mintákat megvalósító szerkezet létrehozása volt. Ezzel szemben mi olyan rajzoló robotok megépítésére törekedtünk, amelyekkel matematikailag pontosan definiált görbék készíthetők. Éppen ezért a konstrukció kialakításánál végig szem előtt tartottuk, hogy a *cikloidális görbék* matematikai származtatásának elvén alapuljon a robot működése, és a lehető legegyszerűbb szerkezeteket alakítsuk ki. A robotokat a LEGO Education SPIKE Prime alap- és kiegészítő készletekből építettük.

A *Spikográf 1.0* robottal *hipocikloisok* rajzolhatók. A rögzített, 7 cm átmérőjű körhöz a kiegészítő készlet fogazott íves elemeit használtuk. A gördülő kört modellező fogaskereket a SPIKE-készlet nagymotorja forgatja. A generálopontot a rajzófejbe illesztett filctoll adja, amely a motor működésekor megrajzolja a fogaskerekek méreteinek megfelelő *hipocikloist*. A konstrukció lehetővé teszi, hogy a generálopontot ne csak a gördülő körlapon helyezzük el, hanem a sugár meghosszabbításán is rögzíthető legyen, így a *Spikográf 1.0* robottal olyan *hurkolt hipocikloisok* is elkészíthetők, amelyek a Spirograph-készletekkel nem rajzolhatók meg (Körei–Szilágyi, 2022b).



3. ábra. A Spikográf 1.0 robot, amellyel hipocikloisok rajzolhatók (a szerzők saját szerkesztése)

Természetesen a *Spikográf 1.0* robot nem képes bármilyen *hipocikloist* megrajzolni, mivel a rögzített kör sugara egy adott érték, 7 cm. A mozgó kör sugarában nagyobb szabadságunk van, de a lehetőségek száma korlátozott, függ a LEGO-készletekben kapható fogaskerek méretétől. A fogaskerek sugara arányos a fogak számával. A LEGO Education SPIKE Prime-alapkészlet négy különböző méretű fogaskereket tartalmaz: 12, 20, 28 és 36 foggal; a bővítő készletben pedig egy nagyobb, 60-as fogaskerék is található. A mozgó kör sugara ennek megfelelően 0,6; 1; 1,4; 1,8 és 3 cm lehet. A modellben a mozgó fogaskerekhez egy LEGO Technic-kart erősítettünk, amelyhez LEGO Technic-csatlakozóval (pin) rögzítettük a rajzolófejet, ami a körrel együtt mozgó generálopontnak felel meg. A LEGO Technic-karon lévő rögzítési pontok közötti távolság 0,8 cm. A karon lévő illesztési pontok száma, valamint a mozgatott fogaskerék mérete együtt határozza meg a *Spikográf 1.0* robottal megrajzolható *hipocikloisok* számát. Ha öt rögzítési pont van a Technic-karon, akkor huszonöt különböző *hipociklois* rajzolható, ha hét, akkor pedig harminöt. Ez a szám kevésnek tűnik, ha arra gondolunk, hogy milyen változatos a *hipocikloisok* világa, és megszámlálhatatlanul sok variáns lehetséges, azonban oktatási szempontból vizsgálva azt láthatjuk, hogy a *Spikográf 1.0* mindhárom alaptípusú *hipociklois* – amikor a generálopont a mozgó kör sugarán (nyújtott), a kör kerületén (csúcsos), illetve a sugár meghosszabbításán van (hurkolt) – létrehozására képes egyszerű átépítéssel, ezért egyaránt jól használható demonstrációs célokra, valamint a hallgatói projektekben is (Körei–Szilágyi, 2022b).

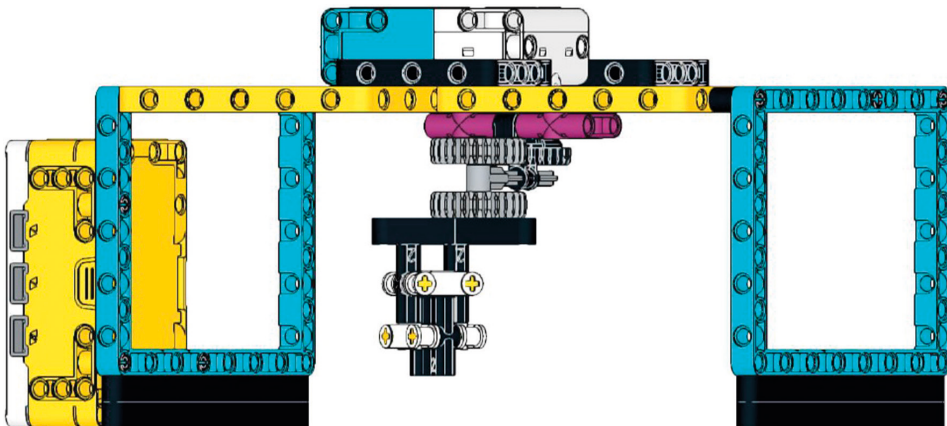


**4. ábra.** A Spikográf 1.0 robottal rajzolt hipociklois, ahol a fix kör sugara 7 cm, a mozgó kör sugara 1,8 cm. A generálopont távolsága a mozgó kör középpontjától 3,2 cm (a szerzők saját készítésű képe)

A *Spikográf 2.0* robotot *epicikloisok* rajzolására készítettük. A tervezés során hamar kiderült, hogy a rendelkezésre álló 36, 28, 20 és 12 foggal ellátott fogaskerek csak a generálókör modellezésére alkalmasak. A másik körnek fixnek kell lennie, hogy a mozgó kör gördülni tudjon körülötte. A fogaskerék mozgatását

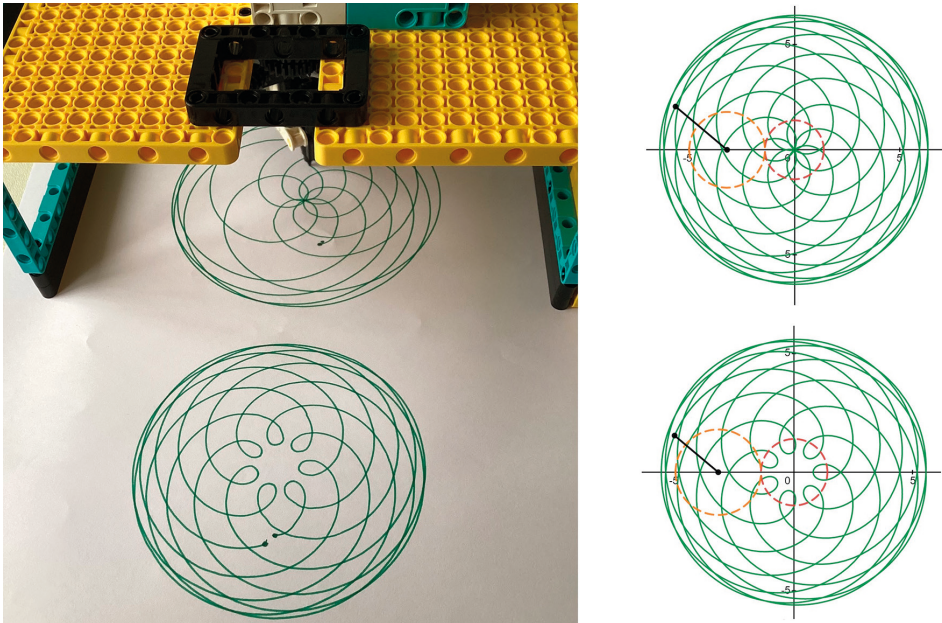
egy motorba szerelt forgó kar segítségével érjük el, a forgás középpontja emiatt szükségszerűen egybeesik a fix kör középpontjával. A LEGO Education SPIKE Prime-készletekben lévő fogaskerekek közepén azonban a szokásos túlyuk helyett tengelyfurat van. Ezzel a rögzítési móddal a fogaskerék nem mozoghat szabadon, mert nem engedné elfordulni a mozgó kört forgató kart. A fogaskerek helyett más megoldást kellett keresnünk a fix kör modellezésére. A LEGO Technic-elemek között forgólapok is vannak, amelyeknek fogazott a kerületük. A kisebbnek 28, a nagyobbknak 60 foga van, és mindkettőnek elegendően nagy szerelésre alkalmas hely található a közepén, ahol a motor által forgatott tengely szabadon mozoghat. Találtunk tehát két olyan LEGO-elemet, amelyek alkalmasak a rögzített körhöz, és négy fogaskereket a mozgó kör modellezéséhez. Ez azt jelenti, hogy nyolc különböző változatban építhető a fentebb felsorolt elemekkel az *epicikloisokat* rajzoló robot.

Ahhoz, hogy a motor el tudja forgatni a mozgó fogaskereket, valamilyen módon össze kell kapcsolnunk őket. Mivel a fix és a mozgó kör középpontja közötti távolság a fogaskerek szerelésétől függően változik, olyan megoldást kellett találnunk, amely minden fogaskerék és forgólap párra alkalmazható. Végül egy fokozatmentesen állítható tengelyt használtunk a mozgó fogaskerék és a motor összekapcsolására. A gördülő fogaskerékhez egy vele szinkronban mozgó ikerpár tartozik, amelyhez a rajzolófejet tartó Technic-kar van rögzítve (5. ábra). A megépített rajzolófej elég stabil ahhoz, hogy a filctollat szilárdan és a helyén tartsa. A fej két csap (pin) segítségével biztonságosan rögzíthető a Technic-karhoz, és a toll hegye pontosan a két rögzítési pont között középen helyezkedik el. A rajzolófejet tartó kar a gördülő fogaskerék párjához a szabványos rögzítési pontokon könnyen illeszthető. Egyenes Technic-karok helyett más, például  $53^\circ$ -ban hajlított emelőkarok is használhatók.



5. ábra. A Spikográf 2.0 robot, amellyel epicikloisok rajzolhatók 28 fogas forgólappal és fogaskerekkel szerelve (a szerzők saját szerkesztése)

Egyenes Technic-kar használata esetén a toll helyzete egyszerű számolással azonosítható, mivel két szomszédos rögzítési pont távolsága 0,8 cm. Ha például egy kilenc lyukkal rendelkező egyenes kart csatlakoztatunk a mozgó körhöz, akkor hét lehetőség van a rajzolófej rögzítésére. Ez azt jelenti, hogy a pólustávolság 0,8 cm-től 5,6 cm-ig változtatható, így bármely fogaskerékpár esetén hét különböző görbe rajzolható meg. Ha tehát a kilenclyukú kart építjük be, akkor az összes lehetséges fogaskerék-párosítás és tollpozíció kipróbálásával ötvenhat különböző *epicikloist* rajzolhatunk a robottal. A 6. ábra két ilyen görbét mutat, amelyeket különböző előre beállított távolsággal (2,4 cm és 3,2 cm) rajzoltunk. A görbék elkészítéséhez kilenc teljes fordulat szükséges mindkét esetben. A *Spikográf 2.0* modell esetén is igaz, hogy mindhárom alaptípusú *epiciklois* – nyújtott, csúcsos és hurkolt – rajzolására képes a megfelelő átépítéssel.



**6. ábra.** A Spikográf 2.0 robottal rajzolt epicikloisok, ahol a fix kör sugara 1,4 cm, a mozgó kör sugara 1,8 cm. A generálopont távolsága a mozgó kör középpontjától a felső sorban 3,2 cm, az alsó sorban 2,4 cm (a szerzők saját készítésű képe)

A robotok által előállítható görbék száma tovább bővíthető mindkét konstrukció esetén. Növelhetjük például a generálopont távolságát hosszabb kar felszerelésével, de figyelembe kell vennünk, hogy minél nagyobb ez az érték, annál instabillabbá válik a szerkezet. Egy másik lehetőség a variációk számának növelésére, ha további megfelelő fogaskerekeket találunk és szerelünk be a robotba, hiszen a felhasználtakon kívül egyéb méretekben is léteznek LEGO Technic-fogaskerekek.



## ÖSSZEZÉS

Látható, hogy az oktatási robotok kiválóan alkalmazhatók olyan síkbeli görbék pontos megrajzolására, melyeknél a hagyományos szerkesztési eljárás hosszadalmas, időigényes művelet. A *cikloidális görbék* robotokkal támogatott tanítása során a hallgatók kísérleti tapasztalatokat szerezhetnek; a görbék megrajzolása mellett levezethetők a megfelelő paraméteres egyenletrendszer, vizsgálhatók a görbék fontosabb tulajdonságai. Lehetőségük nyílik arra, hogy átépítsék, módosítsák a rajzoló szerkezeteket, tehát a matematikai vizsgálódás mellett a mérnöki szemlélet is teret nyer, valamint tagadhatatlan tény, hogy a keletkező görbék változatossága, a szimmetriában rejlő szépség, az egyetlen vonallal rajzolás egyszerűsége, ugyanakkor a görbék záródása miatt a végtelen fogalmának megjelenése a művészeti érzékre is erős hatást gyakorol.

A pozitív visszajelzések arra ösztönöznek bennünket, hogy további lehetőségeket keressünk a STEAM-alapú, robottal kiegészített oktatás megvalósítására a matematika területén. Továbbfejlesztjük, optimalizáljuk meglévő robotjainkat, további hallgatói projekteket hozunk létre, amelyek a valódi élethez kapcsolják az elsajátítandó kompetenciákat a robotokkal történő munka során, valamint új fejlesztésünkben a korábbi tapasztalatok felhasználásával olyan rajzoló szerkezet létrehozásán dolgozunk, amely képes a *cikloidális görbék* mindkét típusának előállítására.

## IRODALOM

- Colerus, Egmont (1938): *Pythagorastól Hilbertig. A matematika történetének korszakai és meszterei: amit a matematika történetéről mindenkinek tudnia kell.* (ford. Winkler József Péter) Budapest: Franklin-Társulat, <https://mek.oszk.hu/05300/05378/05378.pdf>
- Ding, Ding – Guan, Chong – Yu, Yinghui (2017): Game-Based Learning in Tertiary Education: A New Learning Experience for the Generation Z. *International Journal of Information and Education Technology*, 7, 2, 148–152. DOI: 10.18178/ijiet.2017.7.2.857, <http://www.ijiet.org/vol7/857-T03.pdf>
- Körei Attila – Szilágyi Szilvia (2022a): Parametric Graph Project – Using LEGO Gears for Drawing Curves. In: *Advanced Research in Technologies, Information, Innovation and Sustainability. ARTIIS 2022. Communications in Computer and Information Science*, 1675, Springer, Cham., 101–114. DOI: 10.1007/978-3-031-20319-0\_8, [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-20319-0\\_8](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-20319-0_8)
- Körei Attila – Szilágyi Szilvia (2022b): Displaying Parametric Curves with Virtual and Physical Tools. *The Teaching of Mathematics*, XXV, 2, 61–73, DOI: 10.57016/TM-EHGC7743, <http://www.teaching.math.rs/landing.php?p=latest.cap&name=tm2521>
- Lawrence, J. Dennis (1972): *A Catalog of Special Plane Curves*. Dover Publications, ISBN 9780486602882
- Mitnik, Rubén – Recabarren, Matías – Nussbaum, Miguel et al. (2009): Collaborative Robotic Instruction: A Graph Teaching Experience. *Computers Education*, 53, 2, 330–342. DOI: 10.1016/

- j.compedu.2009.02.010, [https://www.researchgate.net/publication/222659149\\_Collaborative\\_robotic\\_instruction\\_A\\_graph\\_teaching\\_experience](https://www.researchgate.net/publication/222659149_Collaborative_robotic_instruction_A_graph_teaching_experience)
- Mubin, Omar – Stevens, Catherine Joanna – Shahid, Suleman et al. (2013): A Review of the Applicability of Robots in Education. *Technology for Education and Learning*, 1, 1–7. DOI: 10.2316/Journal.209.2013.1.209-0015, <https://roila.org/wp-content/uploads/2013/07/209-0015.pdf>
- Reddy Narasareddygari, Mourya – Walia, Gursimran Singh – Radermacher, Alex David (2018): Gamification in Computer Science Education: a Systematic Literature Review. Paper Presented at *2018 ASEE Annual Conference & Exposition*, Salt Lake City, Utah, United States. DOI: 10.18260/1-2-30554, <https://peer.asee.org/gamification-in-computer-science-education-a-systematic-literature-review.pdf>
- Simoson, Andrew J. (2008): Albrecht Dürer’s Trochoidal Woodcuts. *PRIMUS*, 18, 6, 489–499. DOI: 10.1080/10511970701625068
- Spitzer, Michael – Ebner, Martin (2017): Project Based Learning: From the Idea to a Finished LEGO® Technic Artifact, Assembled by Using Smart Glasses. In: *Proceedings of EdMedia: World Conference on Educational Media and Technology, Association for the Advancement of Computing in Education*. Washington, United States, 20–23 June 2017, 196–209, <https://www.learnlib.org/p/178327>
- Takács Anna Mária (2023): Élmény – Gamifikáció – Matematika oktatás: Moodle. *Danubius Noster*, 9, 1, 49–58. DOI: 10.55072/DN.2023.1.49, [https://ejf.hu/sites/default/files/DN/2023/01/04Takacs\\_Anna\\_Maria\\_ELMENY\\_GAMIFIKACIO\\_MATEMATIKA\\_OKTATAS.pdf](https://ejf.hu/sites/default/files/DN/2023/01/04Takacs_Anna_Maria_ELMENY_GAMIFIKACIO_MATEMATIKA_OKTATAS.pdf)
- Tuparova, Daniela et al. (2018): Educational Computer Games and Gamification in Informatics and Information Technology Education – Teachers’ Points of View. *2018 41<sup>st</sup> International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO)*. Opatija, Croatia, 21–25 May 2018, 0766–0771. DOI: 10.23919/MIPRO.2018.8400142, <https://tinyurl.com/yck5rzd7>
- Whitaker, Robert J. (2001): Harmonographs, II. Circular Design. *American Journal of Physics*, 69, 2, 174–183. DOI: 10.1119/1.1309522, <https://perso.lpsm.paris/~coudene/harmonograph.pdf>
- Whitaker, Robert J. (2010): Mathematics of the Spirograph. *School Science and Mathematics*, 88, 7, 554–564. DOI: 10.1111/j.1949-8594.1988.tb11854.x.14, [https://www.researchgate.net/publication/227581902\\_Mathematics\\_of\\_the\\_Spirograph](https://www.researchgate.net/publication/227581902_Mathematics_of_the_Spirograph)
- Whitman, Edwin A. (1943): Some Historical Notes on the Cycloid. *The American Mathematical Monthly*, 50, 5, 309–315. DOI: 10.2307/2302830
- Yates, Robert C. (1974): *Curves and Their Properties, Classics in Mathematics Education*. Washington DC: National Council of Teachers of Mathematics, <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED100648.pdf>