

Tanulmányok

BOLYAI JÁNOS KORSZAKALKOTÓ FELFEDEZÉSE KÉT ÉVSZÁZAD TÜKRÉBEN¹

JÁNOS BOLYAI'S GROUNDBREAKING DISCOVERY IN TWO CENTURIES' PERSPECTIVE

Pálfy Péter Pál

az MTA rendes tagja, kutatóprofesszor, Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapest
ppp@renyi.hu

ÖSSZEFOGLALÁS

Kétszáz évvel ezelőtt, 1823. november 3-án írta Bolyai János édesapjának azt a levelet, amelyben bejelentette a nemeuklideszi geometria fölfedezését ezekkel a szavakkal: „a semmiből egy ujj, más világot teremtettem”. A Bolyairól szóló gazdag szakirodalomra támaszkodva röviden bemutatom Bolyai János életét, a geometriát forradalmasító eredményét, munkájának fogadtatását és hatását a matematikában, a filozófiában és a fizikában.

ABSTRACT

Two hundred years ago, on 3 November 1823, János Bolyai wrote a letter to his father announcing the discovery of non-Euclidean geometry with these words: “out of nothing I have created a new, different world”. Drawing on the rich literature on Bolyai, I will briefly present the life of János Bolyai, his revolutionary achievement in geometry, and the reception and impact of his work in mathematics, philosophy, and physics.

Kulcsszavak: Bolyai János, nemeuklideszi geometria, párhuzamossági axióma

Keywords: János Bolyai, non-Euclidean geometry, parallel postulate

¹ A Magyar Tudomány Ünnepeinek megnyitó ünnepi ülésén, a Szegedi Tudományegyetem dísztermében 2023. november 3-án megtartott előadás szerkesztett szövege. A cikket egyidejűleg az *Érintő – Elektronikus Matematikai Lapok* (ematlap.hu) is közli.

A Magyar Tudomány Ünnepét azért tartjuk november 3-án, mert 198 évvel ezelőtt, Széchenyi István ezen a napon tette nemes felajánlását a Magyar Tudós Társaság megalapításának elősegítésére. De ez a nap egy különleges alkalom, kettős évforduló, ugyanis szintén november 3-án, de két évvel korábban írta meg Bolyai János Temesvárról azt a levelet édesapjának Marosvásárhelyre, amelyben bejelentette, hogy „a semmiből egy ujj más világot teremtettem”. A 200 éves évfordulót ünnepli ma a tudományos világ. A bicentenáriumot az UNESCO is fölvette a kiemelkedő évfordulók közé, mint ahogy 2009-ben Bolyai művének kézírata is a Világemlékezet listára (*Memory of the World Register*) került. Általában a tudósok születésének vagy halálának évfordulója ad alkalmat a megemlékezésre. Ritka az ilyen eset, amikor egy tudományos fölfedezés köthető konkrét dátumhoz. Természetesen Bolyai éveken át törte a fejét azon a geometriai problémán, amelynek megoldását ebben a levélben bejelentette, de ezen a napon jutott el oda, hogy eredményét közölje apjával. Utána még hosszú évek teltek el, amíg kicsiszolt formában munkája nyomdába kerülhetett, mindazonáltal 1823. november 3. az a nap, amelyre a Bolyai-geometria születésnapjaként tekinthetünk.

A Szegedi Tudományegyetem méltó helyszíne a rendezvénynek, hiszen ez az egyetem a Kolozsvári Tudományegyetem utóda, és Bolyai János Kolozsváron született. Ma az ottani egyetem a Babeş–Bolyai Tudományegyetem nevet viseli, Szegeden pedig az egyetem matematikai intézetét hívják Bolyai Intézetnek, és az Aradi vértanúk terén a bejárat fölött a Bolyai Épület feliratot olvashatjuk.

Nem vagyok Bolyai-kutató, és matematikusként sem a geometria a szakterületem. Azért vállalkoztam mégis erre az előadásra, mert jelenleg én töltöm be a Bolyai János Matematikai Társulat elnöki tisztét, ennél fogva kötelességemnek éreztem, hogy a mai ünnepi ülés keretében röviden bemutassam Bolyai Jánost, a kétszáz évvel ezelőtt bejelentett fölfedezését és ennek hatását a tudomány fejlődésére. Erre vonatkozó ismereteimet a Bolyairól szóló gazdag szakirodalomból szereztem, ezek közül csak néhányat tudok az irodalomjegyzékben felsorolni.

Bolyai János képét sajnos nincs lehetőség bemutatni, mivel hiteles arcképünk nincsen róla. Ő maga írta: „Egész katonai ingénieurs-hadnagyi teljes parádében levett melyképemet is, bizonyos atyámtóli méltatlanság és arra következő méltatlankodás következtében összeszaggattam; annyira nem vágyom az afféle, mások által vadásztatni szokott külső halhatatlanságra, minden affélét semminek nézvén” (idézi Weszely, 2002, 212.). Fogadjuk hát meg intelmét, és tekintsünk inkább művének halhatatlanságát! Ugyanis az annak idején bélyegen is megjelenített ábrázolás azon a festményen alapul, amelyről egy időben azt hitték, hogy róla készült, aztán bebizonyosodott, hogy ez tévedés. Számos művész is megpróbálkozott Bolyai alakjának megjelenítésével, mintául véve a marosvásárhelyi Kultúrpalota homlokzatán látható szobrot.

Nézzük most Bolyai János főbb életrajzi adatait! Kolozsváron született 1802. december 15-én. Édesapja, Bolyai Farkas sokoldalú, tehetséges ember volt, első-

sorban matematikus, de például drámákat is írt. 1832-ben az Akadémia levelező tagjának választották. János még két éves sem volt, amikor Marosvásárhelyre költöztek, ahol apja a református kollégiumban kapott tanári állást. János tehetsége korán kibontakozott. Apja azt szerette volna, ha az ő nyomdokán Göttingába megy egyetemi tanulmányokat folytatni, de az ifjúkori barát, Carl Friedrich Gauss nem válaszolt a segítségét kérő levélre. Így a matematikához kapcsolódó felsőfokú tanulmányok közül a család lehetőségei folytán csak a katonai, hadmérnöki pálya jöhetett szóba. János kiváló eredménnyel végezte tanulmányait Bécsben, amelynek végeztével 1823 szeptemberében alhadnagyi rangban megkapta első beosztását Temesvárra. Néhány héttel szolgálatának megkezdése után született a híres levél, amelynek az évfordulójára emlékezünk ma. Később Aradon, Lembergben és Olmützben is szolgált. Egészsége fokozatosan romlott, maláriát, kolerát kapott, közlekedési baleset is érte (felborult vele a szekér, amelyen Olmützbe tartott), így aztán 1833-ban kérelmére nyugdíjazták. Ezután visszavonultan élt Marosvásárhelyen, illetve a domáldi családi birtokon. Folytatta tudományos vizsgálódásait. Óriási – jelentős részében még mindig feldolgozatlan – kéziratos hagyatéka található a Teleki Tékában. Mivel nem tudta letenni a megkívánt kauciót, katonatisztként nem kaphatott engedélyt a házasságkötésre, csak a szabadságharc idején adódott lehetősége, hogy elvegye gyermekei anyját. 58 éves korában, 1860. január 27-én halt meg.

Térjünk most rá a matematikára! Ami kora számos matematikusával együtt Bolyai Farkast és Jánost is foglalkoztatta, az a párhuzamosok problémája volt. Miről is szolt ez a kérdés? Időszámításunk előtt 300 körül keletkezett az a mű, amely összefoglalta korának matematikai ismereteit, Euklidész² *Elemek* című munkája. Ennek az első könyve (a tizenháromból) geometriával foglalkozik. Legelső lapjain huszonegy definíciót, öt posztulátumot és kilenc axiómát találunk. Ezekre az alapvetőnek tekintett fogalmakra és igazságokra építve dolgozta ki Euklidész a geometria elméletét, az első könyv végére eljutva a Pitagorasz-tételig. Az 5. posztulátum egyáltalán nem olyan magától értetődő, mint a többi. Így szolt: „És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegeben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozék azon az oldalon, amerre az (összegeben) két derékszögnél kisebb szögek vannak” (Euklidész, 1983). Ezzel egyenértékű az a megfogalmazás, hogy egy egyeneshez egy rajta kívül levő ponton át egyetlen olyan egyenes húzható, amelyik az adott egyenest nem metszi, azaz párhuzar-

² Euklidész nevét a néhai Szabó Árpád akadémikusnak, a görög matematika világszerte elismert szakértőjének véleményére alapozva írom így. Ő azt írta az *Elemek* idézett kiadásának előszavában: „Kételyek merültek föl egyesekben még a név helyesírását illetően is. [...] Ez a magyarázata annak, miért tettek kísérletet a közelmúltban többen arra, hogy a matematikus nevét is következetesen Eukleidésznek írják. – Nem tartjuk fontosnak ezt a próbálkozást...”

mos vele. Ezért szokásos az 5. posztulátumot „párhuzamossági axióma” néven emlegetni. Korábban is, de különösen a 18. század végén és a 19. század elején számos matematikus próbálkozott azzal, hogy ezt a posztulátumot a többi axióma segítségével levezesse, és így posztulátum helyett geometriai tétellel avassa. A problémát vizsgáló matematikusok megpróbálták ellentmondásra jutni abból a feltevésből kiindulva, hogy egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át több olyan egyenes is húzható, amelyek az első egyenest nem metszi. Meghökkenítő következtetésekre jutottak, például hogy egy háromszög belső szögeinek összege kisebb 180 foknál. Arra is következtettek, hogy az euklideszi posztulátum tagadása maga után vonja, hogy nem létezik tetszőlegesen nagy területű háromszög és így tovább. De mindezek csak látszólagos ellentmondások, pusztán az euklideszi geometriában megtanult ismereteinkkel állnak szemben.

Bolyai János következetesen végigvitte, hogy az 5. posztulátum (amely egyébként az *Elemek* más kiadásában a 11. axiómaként szerepel, és ő is így hivatkozik rá) elhagyásával hogyan lehet kiépíteni a geometria elméletét. Ehhez roppant fegyelmezett gondolkodásra volt szüksége, nehogy valahol öntudatlanul felhasználjon egy euklideszi geometriából ismert tényt. Az eredmény egy csodálatos szellemi alkotás, *A tér tudománya*. Ez az igen tömören megírt munka végül nem egy tudományos folyóiratban vagy önálló kiadványként jelent meg, hanem édesapja latin nyelvű tankönyvének függelékeként, ezért hivatkozunk rá az *Appendix* névvel. Az igazi címe viszont lefordítva így hangzik: *A tér abszolút igaz tudománya, a XI. Euklidész-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) helyes vagy téves voltától független tárgyalásban. Annak téves volta esetére, a kör geometriai négyszögesítésével* (Bolyai, 1977). Bolyai János zseniális felismerése tehát abban rejlett, hogy nem bizonyítást akart találni a párhuzamossági axiómára, hanem attól függetlenül építette fel a geometria elméletét, amely nemcsak egyszerű mértani tételeket tartalmazott, hanem magában foglalta a trigonometriát, a területszámítást, a szerkesztéseket. Mindezt mindössze 24 oldalon!

Bolyai nem az egyetlen volt, aki fölfedezte a nemeuklideszi geometriát. Carl Friedrich Gauss, akit kortársai „a matematika fejedelmének” neveztek, a nála két évvel idősebb Farkasnak diáktársa és barátja volt Göttingában, és már akkor sokat beszélgettek a párhuzamosok problémájáról. Erre vonatkozó eredményeit azonban Gauss sohasem publikálta. János munkáját megkapván különös választ írt Farkasnak, ami a Bolyaiakat nagyon elkeserítette. Idézem: „Most valamit fiad munkájáról. Ha azzal kezdem, hogy nem szabad megdicsérnem, bizonyára egy pillanatra meghökkenesz; de ha megdicsérném, ez azt jelentené, hogy magamat dicsérném, mert a mű egész tartalma, az út, amelyet fiad követ, és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30-35 év óta folytatott meditációimmal” (idézi Weszely, 2002, 88.).

Egy orosz tudós, a kazányi egyetem professzora, Nyikolaj Ivanovics Lobacscevszkij is kidolgozta a maga elméletét a nemeuklideszi geometriáról. Nem

tudtak egymásról Bolyaival, így teljesen felesleges prioritási kérdéseket feszegetni. Az ő munkáját azonban 1840-ben Berlinben is kiadták németül, ezért sokáig őt tartották egyedül a nemeuklideszi geometria fölfedezőjének. Bolyai János neve és munkája csak jóval később vált ismertté a nemzetközi tudományos életben.

Magyarországon Bolyai János munkáját nem ismerték, ne csodálkozzunk hát, hogy a temetési szertartást végző református lelkész, Péterfi Károly – aki egyébként filozófiai munkásságának köszönhetően az MTA levelező tagja volt – ezt jegyezte be a halotti anyakönyvbe: „Bolyai János, nyugalm. Ingenieur Kapitány – meghalt agy- és tüdőgyulladásban. Híres nagy elméjű mathematicus volt, az elsők között is első. Kár, hogy nagy talentuma használatlanul ásatott el” (idézi Weszely, 2002, 47.).

Hadd jegyezzem meg, hogy Gauss, aki a korábban idézett furcsa módon kerülte meg János dicséretét, egy tanítványának viszont azt írta: „Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Größe³” (idézi Weszely, 2002, 92.). Nyilvánosan azonban sohasem említette Bolyai János nevét. Gauss halála után, levelezésének – így Farkassal váltott leveleinek – sajtó alá rendezése kapcsán figyelt fel a tudományos világ János munkájára, és néhány lelkes kutató hamarosan lefordította olaszra (1868), franciára (1867), németre (1872) és angolra (1891). (Bár az évszám későbbi, az olasz fordítás került ki korábban a nyomdából.) A világnyelveken történt kiadások nyomán Bolyai János műve megkezdte megérdemelt diadalútját a nagyvilágban. Végül aztán – meglehetősen megkésetten – a magyar tudományosság is elismerte Bolyai Jánost, és 1897-ben megjelent az első (majd kiszáratva a második) magyar fordítás is.

A 20. század elejének legnagyobb matematikusait is foglalkoztatták a nemeuklideszi geometria kérdései, elég csak Henri Poincaré (1902) és David Hilbert (1903) nevét említeni. Érdekesség, hogy az MTA első két Bolyai-díját éppen ők kapták 1905-ben, illetve 1910-ben. A díj alapításával Bolyai János születésének centenáriumán Akadémiánk tompítani próbálta lelkiismeret-furdalását, hogy külföldön előbb figyeltek fel Bolyai zseniális eredményére, mint idehaza. Ez volt akkoriban a legjelentősebb nemzetközi matematikai díj, bár értéke körülbelül egytizede volt a Nobel-díjénak. Aztán 1915-ben a háború, majd az infláció nem tette lehetővé a díj újbóli kiadását. 2000-ben újította meg ezt a hagyományt az MTA, azóta ismét ötévenként ítélik oda a Bolyai János Nemzetközi Matematikai Díjat.

Bolyai János nagyságának illusztrálására hadd hozzak még egy példát. Stephen Hawking – van-e, ki e nevet nem ismeri? – összeállított egy matematikai szöveggyűjteményt, amely Euklidesztől Alan Turingig 2300 év legjelentősebb matematikai munkáit tartalmazza angolul (Hawking, 2007). A huszonegy szerző között, azaz a tudománytörténet legkiemelkedőbb huszonegy matematikusa kö-

³ Ezt a fiatal géométert, Bolyait, elsőrangú lángésznek tartom.

zött ott látjuk Bolyai Jánost! A termékeny matematikusok munkáiból természetesen csak szemelvényeket tud közölni ez a vaskos kötet: Euklidésznek például 117 oldalt, Gaussnak 72-t szentel a válogatás, míg Bolyai János teljes műve és az ehhez fűzött kommentárok 53 oldalt tesznek ki a könyvben. A kötet címe – *God Created the Integers* – egyébként Leopold Kronecker 19. századi német matematikus mondását idézi, miszerint Isten teremtette az egész számokat, minden más az emberek műve a matematikában.

Már említettem, hogy a legkiválóbb matematikusok foglalkoztak a Bolyai–Lobacsevszkij-geometriával, más nevén hiperbolikus geometriával. A matematikának egy új ága jött létre e fölfedezés nyomán. Egy dolog azonban tulajdonképpen hiányzott Bolyai művéből. Az euklideszi posztulátum tagadásából kiindulva a sokak által keresett ellentmondás helyett egy csodálatos elméletet sikerült fölépítenie. De valóban soha nem is fogunk ellentmondásra bukkanni, ha a 24 oldalon leírt tételeken túl még tovább építjük az elméletet? Az ellentmondás-mentesség kérdését csak jóval később sikerült eldönteni azáltal, hogy az euklideszi geometriában konstruáltak olyan rendszereket, amelyek a Bolyai–Lobacsevszkij-geometria tulajdonságaival rendelkeznek. Ilyen például a Beltrami–Klein-féle modell, ahol a hiperbolikus sík pontjainak egy körlemez belső pontjai felelnek meg, és egyeneseknek a kör húrjait tekintjük. Ekkor nyilvánvalóan egy húrhoz egy rajta kívül fekvő ponton át számos olyan húr található, amelyek az első hűrt nem metszi. A modell nehézsége, hogy a távolságok és a szögek másképp számíthatók, mint magában az euklideszi geometriában. A Poincaré-féle modellben egyeneseknek a határkört merőlegesen metsző köríveket tekintjük. Itt a szögek megegyeznek az euklideszi értelemben vett szögekkel, de a távolságokat szintén másképpen kell mérni. E modellek révén bebizonyosodott, hogy amennyiben az euklideszi geometria ellentmondásmentes – márpedig ebben bízunk – akkor a Bolyai–Lobacsevszkij-geometria is az.

Azáltal, hogy kiderült, hogy nem az euklideszi geometria az egyetlen lehetséges geometriai rendszer, megnyíltak a lehetőségek további, még általánosabb geometriai rendszerek kidolgozására, módot adva a matematikusoknak a tér fogalmát kitágító, ugyanakkor a valóságos viszonyokra jobban alkalmazható elméletek megalkotására. Ezen az úton tette az első, forradalmi lépést Bolyai János.

Természetes, hogy a nemeuklideszi geometria csak lassan vált elfogadottá, hiszen állításai ellentétben álltak a kétezer éven át megkérdőjelezhetetlennek tekintett euklideszi tételekkel. Idézhetem Aquinói Szent Tamást, aki azt írta: „Isten nem teremthet olyan háromszöget, melynek szögösszege két derékszögtől eltér” (lásd Tóth, 2002, 39). Ezzel szemben a Bolyai János által teremtett új, más világban minden egyes háromszög belső szögeinek összege kisebb 180 foknál. Mi több, a háromszög területe arányos azzal a különbséggel, amennyivel a szögösszeg elmarad a 180 foktól. Ebből következik, hogy létezik egy határ, amelyet egyetlen háromszög területe sem léphet túl, sőt el sem érhet.

De ha a geometria lehet ilyen is, meg olyan is, akkor nem állja meg a helyét az a filozófiai megközelítés, hogy a tér érzékelésünk *a priori* sajátossága, ahogyan azt Immanuel Kant *A tiszta ész kritikájában* megfogalmazta. Valószínűleg a nemeuklideszi rendszernek ez a filozófiai „mellékhatása” lehetett az, ami Gausst visszatartotta attól, hogy maga is papírra vesse vizsgálódásainak konklúzióját. Bolyai János azonban nem tántorodott el, a világ elé tárta radikálisan új elméletét.

A nemeuklideszi geometria döntő hatással volt a fizika fejlődésére is. Egy tanulmányában Albert Einstein (1925) arról ír, hogy a 19. század fizikusai evidenciának tekintették az euklideszi geometria fogalmait és posztulátumait. Ennek a hozzáállásnak a meghaladása majdnem egy évszázadba telt, és azokon a tisztán elméleti matematikai kutatásokon alapult, amelyeket még jóval azelőtt végeztek, hogy „az euklideszi geometria zubbonya túl szűknek bizonyult a fizika számára”. A nemeuklideszi geometria kialakulásáról így fogalmaz: „lassan kialakult az a sejtés, hogy [a párhuzamossági axióma] a többtől független. Ezt oly módon lehetett bizonyítani, hogy egy olyan ellentmondásmentes logikus rendszert építünk, ami az euklideszitől abban és csak abban különbözik, hogy a párhuzamossági axiómát egy másikkal helyettesítjük. Hogy ezt a gondolatot önállóan megfogalmazták, és meggyőzően megvalósították, az egyrészt Lobacsevszkij, másrészt Bolyay [sic!] (apa és fiú) [sic!] elévülhetetlen érdeme.” Az általános relativitáselméletben a geometria és a gravitáció szerves egységbe forr.

Végezetül hadd említsem meg, hogy Bolyai műve és személye nemcsak a tudomány és a tudománytörténet számára nyújt inspirációt, hanem a művészetekben is megjelenik. A szépirodalomból Babits Mihály híres Bolyai-szonettje, Németh László *A két Bolyai* című drámája, továbbá Láng Zsoltnak a négy évvel ezelőtt megjelent regénye juthat elsőként eszünkbe, de a sort hosszan lehetne folytatni. A képzőművészetekben nemcsak Bolyai alakja, hanem Bolyai matematikája is megjelenik, mint például Márton A. András képein, vagy ilyen a marosvásárhelyi Bolyai utcában álló pszeudoszféra szobor is, Horváth Sándor alkotása. (A pszeudoszféra egyébként egy olyan felület, amelyen – lokálisan – a hiperbolikus sík tulajdonságai érvényesülnek.)

Azt rémélem, hogy még ha a matematikai részletekkel nem is volt lehetőség foglalkozni ennek a rövid előadásnak a keretében, talán sikerült érzékeltetnem Bolyai János fölfedezésének rendkívüli jelentőségét. Joggal írhatta tehát levelében kétszáz évvel ezelőtt ő ezeket a sorokat: „olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam, [...] ha meglátja Édes Apám, megismeri; most többet nem szólhatok, csak annyit: hogy semmiből egy ujj, más világot teremttem” (lásd Benkő, 1975, 158.).

Én nem tudok elég költőien fogalmazni, ezért akadémiánk egykori elnökének, Szentágothai Jánosnak a szavaival zárom előadásomat: „A magyar nép géniusza – a tudomány területén – a legmagasabb fokon Bolyai Jánosban öltött testet” (idézi Weszely, 2002, 9.).

IRODALOM

- Benkő Samu (szerk.) (1975): *Bolyai-levelek*. (ford. B. Fejér Gizella) Bukarest: Kriterion Könyvkiadó
- Bolyai János (1977): *Appendix. A tér tudománya*. (szerk. Kárteszi Ferenc) Budapest: Akadémiai Kiadó, ISBN: 9630515121
- Einstein, Albert (1925): Nichteuklidische Geometrie und Physik. *Die neue Rundschau*, 36, 1, 16–20.
- Euklidész (1983): *Elemek*. (ford. Mayer Gyula) Budapest: Gondolat Könyvkiadó, ISBN 9632812670, <https://mek.oszk.hu/06200/06232/pdf/elemek1.pdf>
- Hawking, Stephen (2007): *God Created the Integers. The Mathematical Breakthroughs That Changed History*. Philadelphia–London: Running Press, ISBN 9780762430048
- Hilbert, David (1903): Neue Begründung der Bolyai–Lobatschefskyschen Geometrie. *Mathematische Annalen*, 57, 2, 137–150.
- Poincaré, Henri (1902): *La Science et l'Hypothèse*. (Chapitre III: Les géométries non euclidiennes). Paris: Flammarion, az 1917-es kiadás szövege: <https://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/chp/hp-pdf/hp1917sh.pdf>
- Tóth Imre (2002): *Bécsről Temesvárig: Bolyai János útja a nem-euklideszi forradalom felé*. (ford. Erdélyi Ágnes) Budapest: Typotex Kiadó, ISBN 9639326445
- Weszeley Tibor (2002): *Bolyai János. Az első 200 év*. (Tudomány – egyetem) Budapest: Vince Kiadó, ISBN 9639323535, <https://mek.oszk.hu/05400/05456/05456.pdf>