Magyar Tudomány 180(2019)2, 255–265
DOI: 10.1556/2065.180.2019.1.10

Megemlékezés

ALEKSZANDR LJAPUNOV, AKI RENDET CSINÁLT A STABILITÁSELMÉLETBEN

ALEKSANDR LYAPUNOV, WHO HAS PUT STABILITY THEORY IN ORDER

Hatvani László

az MTA rendes tagja, Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet
hatvani@math.u-szeged.hu

ÖSSZEFOGLALÁS

Száz éve, 1918. november 6-án halt meg a kiemelkedő orosz matematikus, Alekszandr M. Ljapunov. Emléke előtt tisztelegve felidézzük életének főbb eseményeit gyermek- és diákkorából, a szentpétervári évekből 1885-ig, harkovi éveiből, majd második szentpétervári korszakából, 1902-től haláláig. Röviden számba vesszük munkásságának főbb területeit (stabilitáselmélet, potenciálelmélet, valószínűség-számítás, az égitestek alakja), legrészletesebben a stabilitáselméletet és a káoszelméletet érintve.

ABSTRACT

One hundred years ago, on the 6th of November 1918 died the outstanding Russian mathematician Aleksandr M. Lyapunov. Bowing before his memory we recollect the main events of his life as a student, then from the years spent in Saint Petersburg until 1885, from the Kharkov period, and finally from his second period in Saint Petersburg from 1902. We recount main fields of his scientific activity (stability theory, potential theory, probability theory, form of planets), concerning stability theory and chaos theory in details.

Kulcsszavak: dinamikus rendszer**,** stabilitás, aszimptotikus stabilitás, Ljapunov-kitevő, káosz, centrális határeloszlás-tétel

Keywords: dynamical system, stability, asymptotic stability, Lyapunov exponent, chaos, central limit theorem

ÉLETE

Száz éve, 1918. november 6-án halt meg az orosz matematikának, sőt nyugodtan kijelenthetjük, hogy az egész világ matematikatörténetének kiemelkedő tudósa, Alekszandr Mihajlovics Ljapunov.

1857. május 25-én született Jaroszlavlban. Apja korábban a kazanyi obszervatórium csillagásza volt, majd a jaroszlavli gimnázium igazgatójaként dolgozott. Hat testvére közül négy gyerekkorában meghalt, és vele együtt csak három fiú élte meg a felnőttkort. Alekszandr volt a legidősebb. Testvérei is tehetségesek voltak: idősebb fivére, Szergej híres zeneszerző volt, a fiatalabb, Borisz a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának rendes tagja lett, szláv nyelvészettel foglalkozott. A kis Ljapunov első iskoláit otthon végezte apja, majd az ő halála után nagybátyja irányításával. 1870-ben a család Nyizsnyij-Novgorodba költözött. Itt beíratták a helyi gimnáziumba, ahol 1876-ban aranyéremmel végzett. Mivel otthon és a legközelebbi rokonságban folyamatosan alkotó szellemi légkörben forgolódott, ekkorra már kialakult szenvedélyes érdeklődése a tudományok iránt.

A gimnázium befejezésének évében beiratkozott a Szentpétervári Egyetem matematika szakára. Ez az időszak a pétervári matematikai iskola fénykora volt, amit az iskola alapítójának, Pafnutyij L. Csebisevnek, valamint kiváló tanítványainak, többek között Alekszandr N. Korkinnak és Jegor I. Zolotarjovnak a neve fémjelzett. Ljapunov a szokásosnál két évvel rövidebb idő alatt kitüntetéssel diplomázott, majd az egyetem Mechanikai Tanszékén dolgozott. Első pétervári tartózkodása 1885-ig tartott – 1902-ben, miután az Orosz Tudományos Akadémia rendes tagjává választották, visszatért ide.

Az 1876–1885 közötti időszak meghatározó volt egész tudományos karrierje szempontjából, ami a pétervári iskola legendás inspiráló atmoszférájának, az itt kutató és oktató tanároknak, tudósoknak, valamint a megtermékenyítő, pezsgő közeget biztosító diáktársaknak volt köszönhető. A fiatal, szárnyait bontogató Ljapunovra Csebisev volt igen nagy hatással. Visszaemlékezéseiből kiderül, hogy nagyon szerette az ő előadásait; ezek és az egyéni tanácsok, vélemények, és útmutatások határozták meg későbbi tudományos tevékenységének karakterét. Ahogyan a többi Csebisev-követőnek, neki is alapvető felfogásává vált, hogy a matematikai kutatásoknak is mindig a realitások talaján kell maradniuk. Csak azok a kutatási témák értékesek, amelyek az alkalmazásokból származnak, és csak azok az elméletek igazán hasznosak, amelyek valóságos speciális esetek vizsgálata során születnek.

Az egyetem elvégzése után, 1882-ben Ljapunov többször felkereste Csebisevet, és tanácsát kérte, milyen témából készítse magiszteri disszertációját. Csebisev kifejtette neki, hogy véleménye szerint nem érdemes könnyű matematikai kérdésekkel foglalkozni, amelyek általánosan ismert módszerekkel megoldhatók, még akkor sem, ha a kérdések és a rájuk adható válaszok formálisan újak. Minden fiatal matematikusnak, aki már megszerezte az alapvető jártasságot a tudományos kutatásban, valamilyen komoly, ismert nehézségű matematikai probléma megoldásával kell próbálkoznia.

Ebben a minőségben a Mechanikai Tanszéken dolgozó fiatal Ljapunovnak a következő problémát ajánlotta. Ismeretes, hogy a kis sebességgel forgó mozgást végző folyadékok egyensúlyi formái ellipszoidok, de bizonyos kritikus sebességeknél ezek az ellipszoid egyensúlyi formák megszűnnek. Igaz-e az, hogy az ellipszoid a kritikus sebességnél olyan új egyensúlyi formákba megy át, amelyek a kritikus sebességhez közeli sebességeknél az ellipszoidtól kicsit különböznek? A mai nyelvezettel élve ez egy bifurkációs probléma, ami alapvető a bolygók formájának kialakulása szempontjából. Csebisev azt mondta: „Ha ön megoldja ezt a problémát, egyből ismert matematikus lesz.” Arra vonatkozóan, hogyan fogjon neki a kérdés tanulmányozásának, Ljapunov nem kapott Csebisevtől útmutatást. Ennek ellenére nagy lelkesedéssel kezdte a munkát. Később megtudta, hogy ugyanezt a problémát Csebisev Zolotarjovnak és Szofja V. Kovalevszkajának is kitűzte. Nem ismeretes, hogy ők foglalkoztak-e a kérdéssel. Ljapunov néhány sikertelen próbálkozás után félretette a problémát (de csak egy időre; később nagyon fontos eredményeket közölt a témakörben egészen élete végéig), és elkezdett egy olyan témával foglalkozni, amelyik a sikertelen próbálkozás közben fogalmazódott meg benne: stabilisak-e a kis sebességeknél meglévő egyensúlyi ellipszoidok? Lehetséges, hogy ennek a kitérőnek köszönheti az utókor a modern stabilitáselmélet megszületését! Ebből a problémából készítette el 1884-ben magiszteri értekezését, amelyet 1885-ben védett meg a Szentpétervári Egyetemen. Az egyik opponense Dimitrij K. Bobilev volt, aki biztatta, hogy publikálja az eredményeket. Csebisevnek és Bobilevnek igaza lett: magiszteri disszertációjának köszönhetően a 27 éves Ljapunov neve ismertté vált Európában. Megjelenése után közvetlenül rövid tartalmi ismertetés jelent meg róla a *Bulletin Astronomique*-ban, majd 1904-ben az *Annales de l’Université de Toulouse* a mű teljes francia fordítását is közölte. Ljapunov 1885-ben magántanári docensi (Privatdozent) kinevezést kapott, és meghívták a Harkovi Egyetem Mechanikai Tanszékének vezetésére.

Mielőtt életének eredményekben ugyancsak rendkívül gazdag harkovi szakaszára térünk, meg kell emlékeznünk Ljapunov két nagyon fontos pétervári kapcsolatáról. Az egyik a már említett Bobilev, aki tanára és egyetemi éveinek kezdete óta mentora volt, és akivel egészen haláláig szoros kapcsolatban maradt. Bobilev az első pillanatban felismerte Ljapunov kiemelkedő tehetségét, és folyamatosan támogatta karrierje építésében. 1880-ban az ő vezetésével készített pályaművel Ljapunov aranyérmet nyert; a pályamű anyagából két tudományos dolgozata jelent meg. Visszaemlékezéseiben meghatottan mond köszönetet egykori tanárának a közel negyvenéves támogatásért, külön kitérve arra, milyen fontos volt számára, hogy nagyon elfoglalt mestere rá mindig szakított időt, segítette az első lépések megtételében, eligazította a szakirodalom útvesztőiben, kigyomlátta első ifjúkori, sokszor naiv fogalmazványait. Ebből is látszik, hogy még a legnagyobb tehetségek kibontakozásában is mekkora a jelentősége a jó tanárnak, a mentornak. A másik, ugyancsak egész életre szóló kapcsolata Szentpétervárott Andrej A. Markovval alakult ki, aki csak egy évvel volt idősebb nála, mégis meghatározó volt tudományos fejlődése szempontjából. Valószínűleg ennek a kapcsolatnak is köszönhető, hogy Ljapunov nagyon fontos eredményeket ért el a valószínűség-elméletben is.

Harkovban óriási lendülettel vetette magát a munkába. Azonnal átvette és megújította a mechanikai kurzusokat mind a Harkovi Egyetemen, mind a Műszaki Főiskolán. Az anyagokból tankönyveket is írt, amelyek kiválóságáról mi is meggyőződhetünk, mert 1982-ben az Ukrán Tudományos Akadémia megjelentette azokat. Oktatómunkája mellett próbált időt szakítani a kutatásra is, de ez jóval nehezebb volt, mint korábban Pétervárott. Óriási munkabírás jellemezte. Éjszaka is dolgozott általában hajnali 4-ig, 5-ig, de az is többször előfordult, hogy alvás nélkül ment az egyetemre előadást tartani. Talán ennek köszönhető, hogy tudományos pályája is egyre meredekebben ívelt felfelé. Két alapvető dolgozatot közölt potenciálelméletből, amellyel még Pétervárott kezdett foglalkozni. Sikerült alapvető eredményeket elérnie a valószínűség-elméletben, a centrális határeloszlások témájában, amely még ugyancsak Pétervárott, Csebisev előadásain keltette fel a figyelmét. Ezeket a tételeket Markov mutatta be az Orosz Tudományos Akadémián. És ami számunkra, dinamikával foglalkozó matematikusok számára a legfontosabb: 1888-tól kezdte publikálni véges szabadsági fokú mechanikai rendszerek mozgásainak stabilitására nyert általános eredményeit. 1892-ben közölte a *Mozgások stabilitásának általános problémája* című munkáját, amelyben megteremtette a modern stabilitáselméletet; erre a későbbiekben még visszatérünk. Ezt a művét nyújtotta be doktori disszertációnak, amit 1892 szeptemberében a Moszkvai Egyetemen védett meg. Egyik opponense Nyikolaj E. Zsukovszkij, a „repülés atyja” volt. Magiszteri értekezéséhez hasonlóan doktori disszertációját is teljes terjedelemben közölték francia nyelven az *Annales de l’Université de Toulouse*-ban. 1893-ban a Harkovi Egyetemen egyetemi tanárrá nevezték ki.

Ljapunov mindkét pétervári korszaka idején rendkívül visszahúzódó életet élt. Csak legszűkebb rokonságával érintkezett, tudós kollégái közül is csak kevéssel tartott kapcsolatot. Ez Harkovban egészen másként alakult. Nappal általában egyetemi dolgozószobájában tartózkodott, ajtaja mindig nyitva állt kollégái és tanítványai előtt, akikkel termékeny beszélgetéseket folytatott, persze többnyire matematikáról. Legjobb tanítványa Vlagyimir A. Sztyeklov, a későbbi akadémikus volt. Ő leírta első találkozását Ljapunovval 1885-ben. A történet megértéséhez tudni kell, hogy milyen politikai légkör uralkodott ezekben az években az egyetemeken Oroszországban. 1863-ban bevezettek az oktatásban egy új működési szabályzatot, amely a korábbinál lényegesen több jogot biztosított a hallgatóságnak, és megszüntetett több konzervatív nemesi előjogot. 1884-ben új oktatási minisztert neveztek ki Ivan Gyeljanov személyében, aki elkezdte felszámolni az 1863-as vívmányokat, például ki akarta tiltani a nőket az egyetemekről. A diákság döntő többsége ellenezte ezeket a reakciós intézkedéseket, és tüntetésbe kezdett. Amikor Harkovban megtudták, hogy Pétervárról egy új professzort neveztek ki a mechanika oktatására, az a hiedelem terjedt el közöttük, hogy az új professzor is egy, a reakciót erősítő „gyeljanovi kreáció", és elhatározták, hogy ellehetetlenítik a működését. A zsúfolásig telt auditóriumba a dékán kísérte be az új előadót az első előadásra, és bemutatta a hallgatóságnak. Már az meglepetést keltett, hogy az „öreg konzervatív kreáció" helyett a dékán társaságában egy náluk alig idősebb, 28 éves, határozottan jóképű fiatalember lépett a terembe (Sztyeklov „kraszovec"-et ír, ami magyarul férfiszépséget jelent, de ennek a magyarban van valami ide nem illő pejoratív felhangja). Amikor a dékán elhagyta a termet, az új előadó az izgalomtól kissé remegő hangon rögtön elkezdett mechanikáról beszélni. És ekkor jött az igazi meglepetés. A mechanika nem tartozott a hallgatóság kedvenc tárgyai közé. Az új előadó olyan lelkesen, magával ragadóan és érthetően beszélt az addig száraznak és titokzatosnak tűnő fogalmakról, hogy a korábbi előítélet teljesen eloszlott, és ettől a naptól kezdve a diákok szemében Ljapunov különös pozíciót foglalt el. Nagy tiszteletet vívott ki lelkesedésével, alaposságával, sugárzó tudásával és avval a szándékával, hogy a hallgatóságot az ismeretek egy nagyon magas szintjére emelje. Erőfeszítéseinek hála, még azok is megközelítették ezeket a magasságokat, akikben egyébként nem munkált különösebb érdeklődés a mechanika iránt.

Ljapunov aktívan részt vett az egyetemi közéletben. Egyik professzortársa így jellemezte: „A. M. Ljapunov azok közé a professzorok közé tartozott, akik az egyetem igazi lelkét alkották, akik által az egyetem élt és virágzott, akik megtestesítették a tanár és a tudós ideálját. Minden rossz szándék és intrika távol állt tőle, ő állandóan a tudomány tiszta légkörében élt." Jelentős volt a Harkovi Matematikai Társulatban végzett tevékenysége is. 1899-től 1902-ig elnöke volt a társulatnak, és szerkesztője a társulat közleményeinek. Minden harkovi eredményét előadta a társulat tudományos ülésein, ahol tanítványai, Sztyeklov és Nyikolaj N. Szaltikov is gyakran felléptek előadásaikkal.

1900-ban Ljapunovot az Orosz Tudományos Akadémia levelező, majd 1901-ben rendes tagjává választották, és kinevezték a pétervári Alkalmazott Matematika Tanszék élére, mely állás 1894-től, Csebisev halálától üresen állt. 1902-ben visszaköltözött Szentpétervárra, és ezzel életének harkovi szakasza lezárult. Ljapunov mindig nagy szeretettel emlékezett vissza ezekre az évekre, és Sztyeklov elmondása szerint élete legboldogabb szakaszának nevezte.

1902-től lényegében élete végéig Pétervárott élt. Itt már nem tanított, minden idejét a tudományos kutatásnak szentelte. Visszatért ahhoz a kérdéshez, amit még Csebisev tűzött ki számára 1882 körül a forgó mozgást végző nehéz folyadék egyensúlyi formájának alakulásáról, változó forgási sebesség esetén. Végül sikerült a kérdést teljes egészében megválaszolnia. Ezt a kitartást, eltökéltséget és tudományos erőfeszítést méltán nevezte Sztyeklov igazi hőstettnek. Ljapunov nagyon zárkózott életet élt. Nem vett részt társadalmi és kulturális eseményeken, kivéve öccse koncertjeit, kerülte a társaságot. Az egyedüli pihenést az jelentette számára, hogy időnként alkalmat talált a természet csodálatára. Nagyon szeretett kerti és szobanövényeket, fákat ültetni és gondozni, lakását fikuszok és pálmák díszítették.

Aktív szakmai levelezésben állt számos külföldi matematikussal, köztük Henri Poincaréval és Émile Picard-ral. 1908-ban meghívták a Negyedik Nemzetközi Matematikai Kongresszusra Rómába, ahol a levelezőtársak közül sokkal találkozott. Sajnos Poincaréval, akihez a legszorosabb kutatási szálak fűzték, sohasem sikerült személyesen megismerkednie.

1909-től részt vett a Tudományos Akadémia nagy vállalkozásában, Leonhard Euler összes műveinek összegyűjtésében és kiadásában. Szerkesztője volt a matematikai műveket közreadó 18. és 19. kötetnek.

Tudományos és pedagógiai szolgálataiért számos elismerést kapott. Tiszteletbeli doktora volt a Pétervári, a Harkovi és a Kazanyi Egyetemnek, külső tagja a római Accademia dei Linceinek, levelező tagja a Párizsi Akadémiának, tiszteleti tagja a Harkovi Matematikai Társulatnak és tagja más tudományos társaságoknak.

1917 júniusában feleségével együtt Odesszába költözött, ahol fiatalabb fivére élt. Ljapunov harkovi tartózkodásának második évében kötött házasságot másod-unokatestvérével, akivel magántanulóként valamikor együtt kezdték iskolai tanulmányaikat apjánál. Az 1900-as évek elején felesége tüdőtuberkulózist kapott, és állapota egyre rosszabbra fordult. Az orvosok levegőváltozást javasoltak, ezért utaztak Odesszába. Ljapunov az 1918/19-es tanévre speciálkollégiumot hirdetett és indított el az Odesszai Egyetemen *Az égitestek alakjáról* címmel. Felesége sajnos 1918. október 31-én meghalt, s ugyanezen a napon Ljapunov főbe lőtte magát. Azt kérte, hogy feleségével egy sírba temessék. 1918. november 3-án hunyt el.

MUNKÁSSÁGA

Ljapunov főleg a matematika-mechanika négy területén végzett kutatásai során ért el korszakalkotó eredményeket: 1. stabilitáselmélet, 2. potenciálelmélet, 3. valószínűség-számítás, 4. az égitestek alakja.

A stabilitáselméletet két karakterisztikusan különböző korszakra lehet osztani, a Ljapunov előtti és az ő munkásságával induló korszakra. A mérföldkő a már említett 1892-es doktori disszertáció. Ljapunov előtt a stabilitáselméletet a mechanika részeként különböző speciális mechanikai rendszerekre vonatkozó stabilitásvizsgálatok összessége jelentette anélkül, hogy magának a stabilitásnak lett volna egzakt definíciója, vagyis igazi elmélet nem is létezett. A legáltalánosabb és legismertebb eredmény Joseph Louis Lagrange tétele volt, amely szerint egy konzervatív mechanikai rendszer egyensúlyi helyzete stabilis, ha az egyensúlyi helyzetben a potenciális energiának szigorú minimuma van. Ezt a tételt Lagrange csak egy speciális esetben bizonyította, az általános esetre Peter Gustav Lejeune Dirichlet adott egy gyönyörű és egyszerű geometriai bizonyítást, amely a teljes mechanikai energia megmaradásának tényén alapult. Ljapunov azt vette észre, hogy ez a bizonyítás nemcsak mechanikai rendszerekre, de általában differenciálegyenletek által leírt tetszőleges rendszerekre (ma úgy mondjuk, dinamikus rendszerekre) is működik, feltéve, ha találunk a rendszerhez „energiaszerűen" viselkedő segédfüggvényt. Először is definiálta egy tetszőleges differenciálegyenlet-rendszer konstans megoldásának (egyensúlyi helyzetének) stabilitását, mondván, hogy a megoldás stabilis, ha ennek a pontnak elég kis környezetéből indítva tetszőleges megoldást, ez a másik megoldás a ponthoz tetszőlegesen közel marad az idő akármilyen nagy értékeire. Más szavakkal, ha egy megoldás kezdeti értékeit elegendően kis mértékben perturbáljuk, akkor az innen induló, ún. perturbált megoldás az eredetihez tetszőlegesen közel marad. A stabilitási problémák megoldása többek között azért nehéz, mert megoldásokat kell összehasonlítani végtelen hosszú időintervallumon, tehát a differenciálegyenletekre ismeretes közelítő numerikus módszerek nem alkalmazhatóak.

Ljapunov két módszert dolgozott ki a stabilitásvizsgálatra. Ezeket ma is Ljapunov első módszereként, illetve Ljapunov második vagy direkt módszereként emlegetjük. Az első módszer igazodik az addigi stabilitásvizsgálati gyakorlathoz, de azt teljesen új alapokra helyezi. Már Ljapunov előtt is ismeretesek voltak, a konstans együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek stabilitási viszonyai. Egy ilyennek az általános megoldása véges sok exponenciális függvény összege, így minden stabilitási kérdést az dönt el, mik a függvények kitevői. Nemlineáris rendszerek stabilitásvizsgálatánál úgy jártak el, hogy vették a jobb oldal Taylor-sorában a lineáris tagot, a többi tagot eldobták, mondván, hogy azok kicsik a lineáris taghoz képest. Az eredeti rendszer konstans megoldását stabilisnak mondták, ha az mint a lineáris rendszer megoldása stabilis volt, különben pedig instabilisnak. Ljapunov az értekezésében megmutatta, hogy ez a módszer hamis eredményekhez vezet bizonyos kritikus esetekben. Az exponenciális függvények szerepét ő is megtartotta, sőt a karakterisztikus szám fogalmának bevezetésével kiterjesztette változó együtthatós lineáris differenciálegyenletekre is. A $^{\mu}$ valós szám egy megoldás karakterisztikus száma, ha az e^{ct} függvények közül $e^{-\mu t}$ van „legközelebb" a megoldáshoz. Bebizonyította, hogy egy változó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásainak csak véges sok különböző karakterisztikus száma lehet, továbbá bizonyos szabályos esetekben az eredeti nemlineáris rendszer azonosan nulla megoldása stabilis, ha a karakterisztikus számok mind pozitívok, illetve instabilis, ha létezik negatív karakterisztikus szám is. Megmutatta azt is, hogy ha a nulla is karakterisztikus szám, akkor meg lehet választani a nemlineáris tagokat úgy, hogy a teljes rendszer nulla-megoldása stabilis legyen, de úgy is, hogy instabilis legyen.

A Ljapunov-féle karakterisztikus számok ellentettjeit *Ljapunov-kitevőknek* nevezzük. Ezek a mennyiségek főszerepet játszanak a matematikai káoszelméletben, amelyet Edward N. Lorenz alapozott meg 1963-ban. Ez az elmélet olyan dinamikus rendszerekről szól, amelyek viselkedése megjósolhatatlan, amennyiben teljesen véletlennek tűnő mozgásokat produkál, annak ellenére, hogy a rendszer minden törvényszerűségét teljes pontossággal ismerjük. A rendszernek létezik egzakt matematikai modellje, amelyben semmilyen véletlen tényező nincs, és minden mozgás akárhányszor változatlan lefolyással megismételhető, ha pontosan ugyanabból a kezdeti állapotból indítjuk a rendszert, viszont a mozgások lefolyása rendkívül érzékeny a kezdeti értékekben történő kis változásokra is. Ezt Lorenz pillangó-effektusnak nevezte, azzal a hasonlattal élve, hogy ha valahol Ázsiában egy pillangó váratlanul összeüti a szárnyait, az Floridában szökőárat eredményezhet, különben viszont nem történt volna semmi. Ezen jelenség fennállását valószínűsíti bizonyos Ljapunov-kitevő. Legyen $u = \Phi(t;\, \xi)$ egy autonóm differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása, amelyre teljesül a $\Phi(0;\, \xi) = \xi$ kezdeti feltétel a ξ kezdeti vektorral. Ha a rendszert a $\xi + \Delta\xi$ kezdeti vektorból indítjuk, és a két megoldás különbségét Taylor-sorba fejtjük, akkor a $\Phi(t;\, \xi + \Delta\xi) - \Phi(t;\, \xi) \approx D_\xi\Phi(t;\, \xi)\Delta\xi$ közelítést kapjuk a két megoldás különbségére. Ez a különbség kis $\Delta\xi$ esetén akkor lehet nagy, ha a $D_\xi\Phi(t;\, \xi)$ derivált-mátrix normája nagy. Az viszont ismeretes, hogy ez a derivált-mátrix eleget tesz az úgynevezett variációs egyenletrendszernek, ami egy változó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer. Ha ennek van pozitív Ljapunov-kitevője a fenti értelemben, akkor a derivált-mátrix normája időben exponenciálisan nő, tehát a két megoldás eltérése bizonyos $\Delta\xi$ esetén exponenciálisan nő. Ha az állapottér korlátos, akkor ebből következik, hogy a megoldásnak nincs megjósolható jövője, hiszen a megoldás fázispontja nem konvergálhat egyensúlyi helyzethez vagy periodikus pályához, hanem ezek között bolyong az idők végezetéig. Ez a káosz.

A második vagy direkt módszer valójában Peter Dirichlet zseniális bizonyításának kiterjesztése tetszőleges differenciálegyenlet-rendszerekre. Ezt azért nevezték el „direkt" módszernek, mert alkalmazásához nem szükséges a rendszer megoldásainak ismerete, ahogyan a Lagrange–Dirichlet-tétel alkalmazásához sem kell ismerni magukat a mozgásokat, csak a teljes mechanikai energiát, ami a kezünkben van. Ez azért óriási jelentőségű, mert magukat a megoldásokat általában nem ismerjük, sőt kivételes esetektől eltekintve tudjuk, hogy a megoldások nem is határozhatók meg, mert a rendszerek nem integrálhatók. (Például a háromtest-problémáról ez be van bizonyítva.) Ljapunov tételeiben a megoldások ismerete helyett az állapothatározók olyan V skalárértékű függvényének (mai elnevezéssel Ljapunov-függvény) létezése van megkövetelve, amely a megoldások mentén vagy állandó, vagy csökken. Ez a magyarázata, hogy a Ljapunov-függvényt korábban „energiaszerű” segédfüggvénynek neveztük, hiszen az energia konzervatív esetben az energiamegmaradás tétele szerint állandó, nem konzervatív esetben, például súrlódás hatására pedig disszipálódik, vagyis a mozgások során csökken. A direkt módszer első tétele szerint, ha egy rendszerhez sikerül Ljapunov-függvényt találni, akkor a nulla-megoldás stabilis.

Ljapunov bevezette a stabilitásnak egy, a gyakorlatban nagyon fontos erősebb változatát is. Ha egy mechanikai rendszerben súrlódás is hat, akkor a tapasztalat szerint az egyensúlyi helyzethez elég közelről megfelelően kis kezdősebességgel indított mozgása során a rendszer „aszimptotikusan megáll”, vagyis az állapothatározók (a nulla egyensúlyi helyzettől való eltérés és a sebesség) nullához tartanak, ha az idő végtelenbe tart. Ezt a tulajdonságot aszimptotikus stabilitásnak nevezte el. Visszagondolva a stabilitás Ljapunov által bevezetett fogalmára, úgy is mondhatjuk, hogy a kezdeti értékekben bekövetkezett perturbáció hatása az idők során elhal. Így viselkedik például az inga, ha hosszú ideig figyeljük, és a súrlódást nem küszöböljük ki. A V az energiához hasonlóan pozitív definit, így az állapothatározók nullához tartása helyett elegendő belátni, hogy V a megoldások mentén nullához tart, vagyis az az összetett függvény, amelynek V a külső függvénye és egy megoldás a belső függvénye, nullához tart. A módszer zsenialitása abban rejlik, hogy az összetett függvény deriváltját még akkor is ki tudjuk számolni, és így a csökkenést, sőt még annak mértékét is ellenőrizni tudjuk, ha magát a megoldást nem ismerjük, mert a belső függvény deriváltja helyére az egyenlet jobb oldalát írhatjuk, amit mindig ismerünk. A direkt módszer második alaptétele szerint, ha ez a derivált negatív definit, akkor a nulla-megoldás aszimptotikusan stabilis.

Azt már Ljapunov előtt hosszú idővel is sejtették, hogy a Lagrange–Dirichlet-tétel megfordítható, vagyis ha konzervatív mechanikai rendszerben a helyzeti energiának az egyensúlyi helyzetben nincs szigorú minimuma, akkor az egyensúlyi helyzet instabilis. Többek között ennek a problémának a tanulmányozására Ljapunov megadott egy instabilitást biztosító feltételrendszert is (a direkt módszer harmadik alaptétele). Ennek felhasználásával bebizonyította a megfordíthatóságot analitikus helyzeti energiára, feltéve, hogy a szigorú minimum hiánya a helyzeti energia sorfejtésének legalacsonyabb fokszámú tagjából kiolvasható.

Természetesen azt mindenki látja, hogy a direkt módszer „csak” egy programot ad arra, hogyan kell stabilitásvizsgálatot végezni. A program első lépése: keressünk Ljapunov-függvényt a rendszerhez. A program arra vonatkozóan nem mond, nem is mondhat semmit, hogyan kell ilyen függvényt találni. A mechanikai rendszerek esetén Isaac Newton megtalálta ezt a függvényt, úgy hívják, mechanikai energia. (Pontosabban szólva, talált egy ilyen függvényt, mert azóta bebizonyosodott, hogy a mechanikai rendszerek stabilitásvizsgálatában is különböző problémák tanulmányozására más, az energiától különböző Ljapunov-függvények lehetnek célravezetőek, még olyanok is, amelyeknek semmilyen mechanikai jelentést nem tudunk tulajdonítani!) Az kétségtelen, hogy a módszer legnehezebb lépése: megtalálni a Ljapunov-függvényt. Erre nincs algoritmus. Jevgenyij A. Barbasin szerint ez a legtöbb esetben szerencse és művészet dolga. Ő azért írt arról egy monográfiát, hogy ezt a művészetet bizonyos tipikus esetekben hogyan kell művelni…

A direkt módszer felfedezése óta eltelt több mint száz év. Ennek az időszaknak az eredményei alapján nyugodtan kijelenthetjük, hogy a stabilitásvizsgálatokban ma is ez a módszer a legáltalánosabb és leghatékonyabb a legkülönbözőbb alkalmazásokban, többek között a műszaki tudományokban, a természettudományokban, különösen a biológiában, de a közgazdaságtanban is.

Végezetül röviden megemlítjük Ljapunovnak a másik három kutatási témában elért eredményeit is.

Potenciálelméleti vizsgálatainak eredményeit Ljapunov 1898-ban a *Journal de Mathematiques*-ban közölte. Ezek az eredmények az egyszerű és a kettősréteg-potenciáljának a tulajdonságaira vonatkoznak, továbbá a Dirichlet-problémával és a harmonikus függvények elméletének néhány alapvető formulájával foglalkoznak. Mint ismeretes, Carl Gottfried Neumann ajánlott egy módszert, amely nemcsak a Dirichlet-probléma megoldásának létezését bizonyította, de alkalmas volt a Laplace-egyenletre vonatkozó peremérték-problémák megoldására is, de a módszerben szereplő végtelen sorok konvergenciáját csak konvex felületek esetében tudták bizonyítani. Ljapunov feltételezte, hogy a Neumann-módszer alkalmazható az adott felületre, és levezette a harmonikus függvények alapformuláit és egész elméletét függetlenül attól, hogy a felület konvex-e, vagy sem.

A valószínűség-számításban nagyon fontosak a független valószínűségi változók összegeinek eloszlásáról szóló centrális határeloszlás-tételek. Csebisev bebizonyított egy ilyen tételt annak feltételezésével, hogy a valószínűségi változók nagyon kis valószínűséggel vesznek fel végtelenbe növekvő értékeket, vagyis a változók minden momentuma véges. Ljapunovnak sikerült ettől a súlyos feltételtől megszabadítani a tételt. Bebizonyította, hogy akkor is igaz, ha a változóknak csak egy momentuma véges. Nagy újdonság volt az is, hogy Ljapunov a karakterisztikus függvényeket használta a bizonyításhoz, és ezzel egy nagyon eredményes és sok területen alkalmazható módszert alapozott meg.

Az égitestek formáinak kialakulására vonatkozó kutatások Newtontól erednek. Ő a *Principiá*ban megmutatta, hogy kis sebességgel forgó mozgást végző *homogén,* cseppfolyós halmazállapotú test „összenyomott” forgási ellipszoid alakját veszi fel a részecskékre ható kölcsönös tömegvonzási erők és a centrifugális erők hatására. Ezt az elméletet továbbfejlesztve Alexis Claude Clairaut 1743-as monográfiájában tanulmányozta az ugyancsak kis sebességgel forgó, *nem állandó sűrűségű* folyadék egyensúlyi formáit. Abból az alapvető feltevésből indult ki, hogy az ugyanolyan sűrűségű folyadékrészek forgási ellipszoidot alkotnak. Pierre Simon de Laplace továbbfejlesztette Clairaut vizsgálatait. Nem tételezte fel eleve, hogy a szintfelületek forgási ellipszoidok. Az inhomogén folyadékot homogén rétegekre bontotta, és megmutatta, hogy ezek a rétegek első közelítésben tényleg forgási ellipszoidokat alkotnak. Laplace vizsgálatai nem voltak matematikailag szigorúan megalapozva. Ljapunov elvégezte a szigorú matematikai megalapozást. Feltételeket adott a folyadék sűrűségére, amelyek mellett bizonyítani tudta az egyensúlyi formák létezését. A munka első felében, függetlenül Laplace vitatható megközelítésétől, egzakt módon levezette a feladatot modellező nemlineáris integrálegyenleteket, és kidolgozott egy módszert ezek megoldására, majd az eredményeket összevetette Clairaut elméletével. A második, óriási fegyelmezettséget és kitartást megkövetelő technikai jellegű részben ellenőrizte a módszer alapjául szolgáló végtelen sorok konvergenciáját. Fontos hangsúlyozni, hogy – szakítva a korábbi szerzők szokásával – nem tételezte fel a folyadék sűrűségét leíró függvény analitikus voltát, csupán annyit, hogy a határoló felület felé haladva ez a függvény csökken, és megengedte, hogy a függvénynek akár megszámlálható sok szakadása is legyen. A Clairaut-egyenlet tanulmányozása ilyen feltételek mellett a Stieltjes-féle integrálelmélet felhasználásával sikerült neki. Ez a munka saját bevallása szerint tizenöt évi tevékenységét tette ki második pétervári tartózkodása idején.

1917-ben, amikor Odesszába költöztek feleségével, az Odesszai Egyetem felkérte egy kurzus megtartására egy általa választott témából. Ljapunov *Az égitestek alakja* címmel hirdette meg a kurzust, amelyben a tizenöt év eredményeiről szándékozott beszámolni. Emberi tartásáról, tudósi és tanári elhivatottságáról tanúskodik, hogy a zavaros politikai helyzet, látásának egyre gyorsabb romlása és felesége betegségének súlyosbodása ellenére hét kétórás előadást meg is tartott a kurzusból, és csak a halálához vezető tragikus események tudták megakadályozni vállalásának teljesítésében.

Alekszandr Mihajlovics Ljapunov, az égitestek tudósa az orosz matematika nagy ívű pályát leíró csillaga volt. Eredményeinek hatása mind az elméleti, mind az alkalmazott matematikában és a mechanikában felbecsülhetetlen. Munkássága, példamutató tudósi, tanári életműve nem halványuló tiszteletet és elismerést vált ki a mai napig a világ matematikusaiból.

IRODALOM

Ljapunov, A. M. (1948): *Összegyűjtött művek.* Moszkva: Szovjetunió Tudományos Akadémiája (orosz nyelven). [Ebben a könyvben érdekes életrajzi visszaemlékezések, valamint matematikai elemzések és kommentárok is találhatók.]

Ljapunov, A. M. (1982): *Előadások az elméleti mechanikáról.* Kiev: Naukova Dumka (orosz nyelven). [Ebben is találhatók életrajzi visszaemlékezések.]

Sinai, Y. (2004): *Russian Mathematicians in the 20th Century.* New Jersey: World Scientific